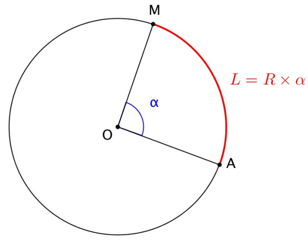
TRIGONOMÉTRIE ET FONCTIONS CIRCULAIRES

I. Le radian

Clipedia, la science et moi ! est un site gratuit animé par Marc Haelterman, professeur de physique à l'école polytechnique de Bruxelles. Vous pouvez vous utiliser le moteur de recherche pour consulter une vidéo sur un thème qui vous intéresse, vous abonner à la chaîne Youtube etc.

Pour ce premier paragraphe, consulter la vidéo : https://www.youtube.com/watch?v=9_XfAr0_Wfc

Définition 1
Le radian est une unité de mesure d'angles.
Soit A et M sont deux points d'un cercle de centre O de rayon R.
L désigne la longueur de l'arc AM.
La mesure en radians de l'angle $\widehat{AOM}$ est le réel $\alpha = \frac{L}{R}$.
Autrement dit, la longueur L de l'arc de cercle AM intercepté par α mesure $R \times \alpha$.



Le radian est une mesure d'angle qui permet d'avoir une relation entre l'angle et la longueur de l'arc intercepté par cet angle. Dans le c**as particulier** où R=1, alors $L = \alpha$
Le cercle de rayon 1 a pour longueur 2π , un angle plat intercepte un arc de longueur π radian.

Conversions : Il y a proportionnalité entre la mesure en degré, en grade et en radian d'un même angle.

Autrement dit $\frac{a}{\pi} = \frac{b}{180} = \frac{c}{200}$ où *a* est la mesure en degré, *b* en radian et *c* en grade.

angle	plein	plat	droit	nul			
mesure en degré		180			60	45	30
mesure en radian		π					
mesure en grade		200					

Exercice : à partir du tableau ci-dessus, compléter celui-ci (indiquer la démarche) :

mesure en degré	135		120		50	
mesure en radian		$\frac{7\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{6}$		$\frac{5\pi}{4}$

Note : le grade est utilisé en topographie (plans de terrains, de cartes).
Désormais en cours de maths, on utilisera le radian comme unité d'angle.

Algorithmique : Voici un algorithme écrit avec Algobox.
Pour saisir le nombre π , on doit taper Math.PI

```
VARIABLES
  t EST_DU_TYPE NOMBRE
  a EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE a
  t PREND_LA_VALEUR (a*180)/Math.PI
  AFFICHER "t est égal à "
  AFFICHER t
FIN_ALGORITHME
```

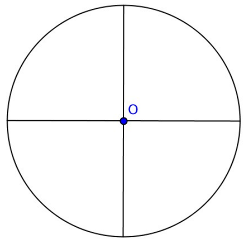
a. Tester l'algorithme pour $\frac{\pi}{4}$, qu'obtient-on en sortie ?

b. Que fait cet algorithme ?

c. Écrire un algorithme en langage naturel qui permette de convertir une mesure d'angle donnée en degré en radian.
Le saisir sur votre calculatrice, la sortie étant exprimée sous la forme d'une fraction de π .

II Enroulement de la droite des réels sur le cercle trigonométrique

a) Cercle trigonométrique

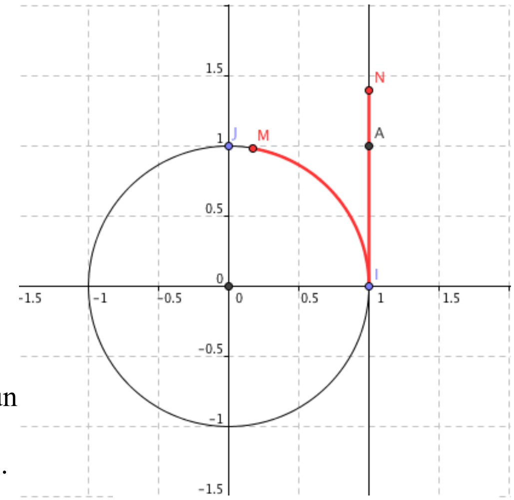


Définition 1 : Sur un cercle, on appelle sens direct, sens positif ou sens trigonométrique le sens contraire des aiguilles d'une montre.

Définition 2 : Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) et orienté dans le sens direct, le cercle trigonométrique est le cercle de centre O et de rayon 1.

b) Principe de l'enroulement de l'axe des réels

Animation réalisée avec *GeoGebra :* on enroule la droite des réels sur le cercle trigonométrique.



$\mathscr{C}$ est le cercle trigonométrique de centre O et de rayon [OI].

On trace la tangente Δ en I au cercle C.

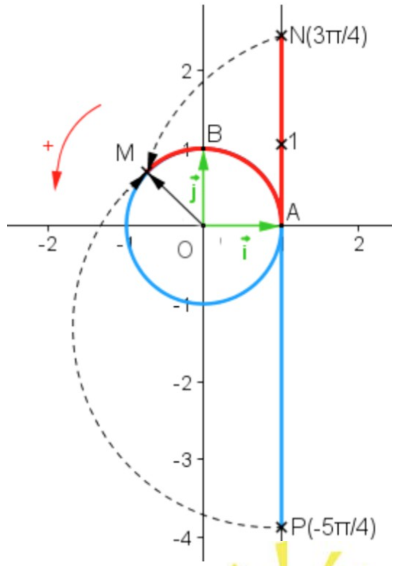
On munit Δ d'un repère (I , A) avec IA = IO = 1

Cette droite Δ graduée représente les nombres réels.

Propriété : Si l'on « enroule » la droite autour du cercle, on associe à tout point N d'abscisse x de la droite orientée un unique point M du cercle. La longueur de l'arc IM est égale à la longueur IN.

c) Plusieurs abscisses pour un seul point...

À plusieurs points de la droite orientée on peut faire correspondre un même point du cercle.
La droite orientée peut en effet s'enrouler plusieurs fois autour du cercle.



Exemple : Ci-contre, les points N et P d'abscisses $\frac{3\pi}{4}$ et $\frac{-5\pi}{4}$ correspondent tous les deux au point M.

- Les points de la droite orientée d'abscisses $\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{3\pi}{2}$ correspondent tous les deux au point .... du cercle trigonométrique.

- Les points de la droite orientée d'abscisses π et $-\pi$ correspondent tous les deux au point .... du cercle trigonométrique.

- Les points de la droite orientée d'abscisses $\frac{3\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$ correspondent tous les deux au point .... du cercle trigonométrique.

d) Mesure principale d'un angle

Définition : on appelle mesure principale d'un angle, en radians, son unique mesure comprise dans l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$.

Exemple : La mesure principale de $\widehat{AOB}$ est $+\frac{\pi}{2}$.

La mesure principale de $\widehat{AOM}$ est $\frac{3\pi}{4}$ et la mesure principale de $\widehat{AOC}$ est $-\frac{\pi}{2}$.

1. Donner les mesures principales des angles suivants en les plaçant sur le cercle trigonométrique :

$$\alpha_1=\frac{21\pi}{2}\ ;\ \alpha_2=\frac{13\pi}{3}\ \text{ et }\ \alpha_3=-\frac{13\pi}{6}.$$

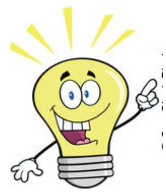
2. Retrouver les réponses à l'aide de calculs.

III Cosinus et sinus d'un nombre réel

Définition

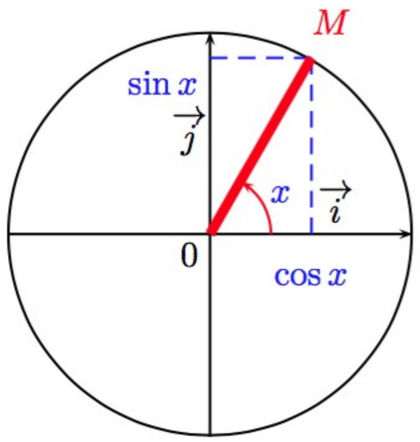
Soit x un réel quelconque. Il lui correspond un unique point M du cercle trigonométrique tel que x soit une mesure en radians de $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$

- Le cosinus de x, noté $\cos(x)$ est l'abscisse du point M dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$
- Le sinus de x, noté $\sin(x)$, est l'ordonnée du point M dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.



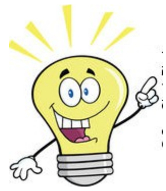
$\cos(x)$ est l'abscisse du point M et $\sin(x)$ est l'ordonnée du point M dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Le point M a pour coordonnées $(\cos(x); \sin(x))$.



Propriété

- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
- $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$

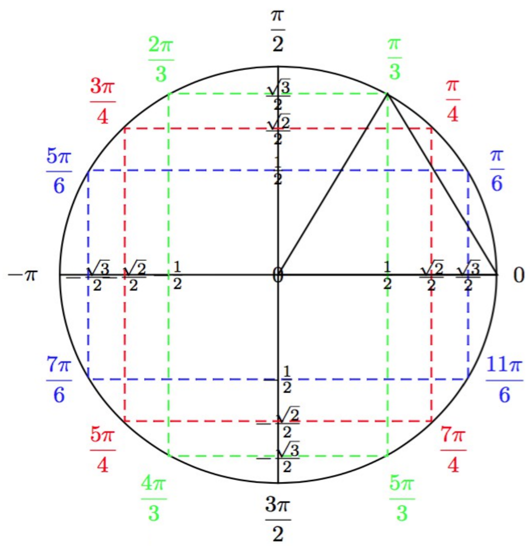


Valeurs remarquables

Elles sont à connaître ou à savoir lire sur votre cercle trigonométrique.

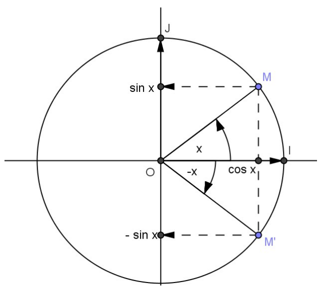
Compléter le tableau ci-dessous à l'aide du cercle trigonométrique :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(x)$					
$\sin(x)$					



Angles associés

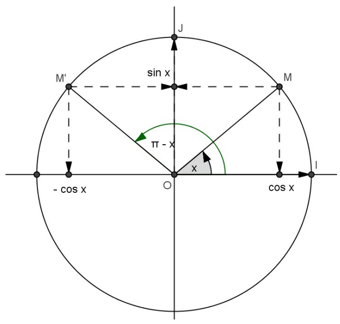
Angles opposés : $\begin{cases} \cos(-x) = \cos(x) \\ \sin(-x) = -\sin(x) \end{cases}$

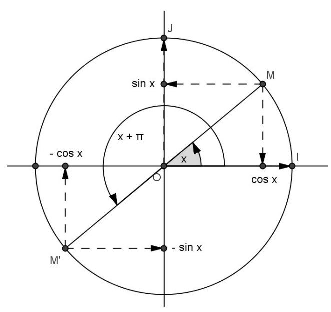


Angles supplémentaires :

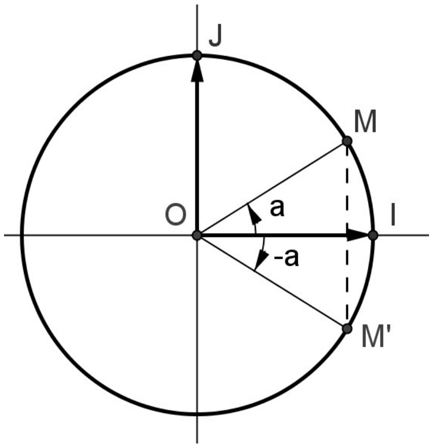
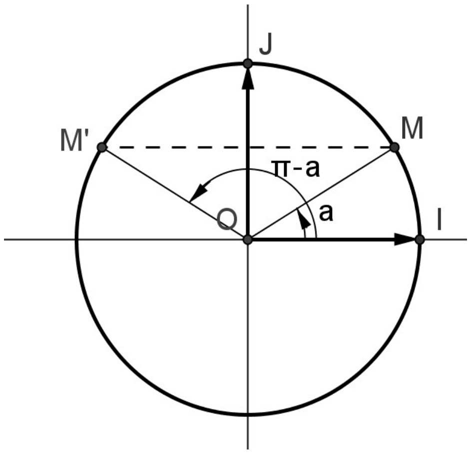
$$\begin{cases} \cos(\pi - x) = -\cos(x) \\ \sin(\pi - x) = \sin(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos(\pi + x) = -\cos(x) \\ \sin(\pi + x) = -\sin(x) \end{cases}$$





IV Équations trigonométriques

Équation	$\cos x = \cos a$ L'inconnue est x, a est un réel.	$\sin x = \sin a$ L'inconnue est x, a est un réel.
Représentation graphique		
Interprétation	M et M' ont la même abscisse $\cos a$	M et M' ont la même ordonnée $\sin a$
Solutions	L'équation $\cos x = \cos a$ équivaut à : $\begin{cases} x = a + 2k\pi \\ x = -a + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$	L'équation $\sin x = \sin a$ équivaut à : $\begin{cases} x = a + 2k\pi \\ x = \pi - a + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$

Exemple 1 : résoudre l'équation $\cos(x) = -0,5$

On sait que $\cos\left(\frac{2\pi}{3} + k \times 2\pi\right) = \cos\left(-\frac{2\pi}{3} + k \times 2\pi\right) = -0,5$

Donc $\cos(x) = -0,5 \Leftrightarrow \cos(x) = \cos\left(\frac{2\pi}{3} + k \times 2\pi\right)$ ou $\cos(x) = \cos\left(-\frac{2\pi}{3} + k \times 2\pi\right)$

Les solutions sont donc les réels de la forme $\frac{2\pi}{3} + k \times 2\pi$ ou $-\frac{2\pi}{3} + k \times 2\pi$.

Exemple 2 : résoudre l'équation $\sin(2x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

On sait que $\sin\left(\frac{\pi}{4} + k \times 2\pi\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{4} + k \times 2\pi\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Donc $\sin(2x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin(2x) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + k \times 2\pi\right)$ ou $\sin(2x) = \sin\left(\frac{3\pi}{4} + k \times 2\pi\right)$

$2x = \frac{\pi}{4} + k \times 2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + k\pi$ et $2x = \frac{3\pi}{4} + k \times 2\pi \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{8} + k\pi$

Les solutions sont donc les réels de la forme $\frac{\pi}{8} + k\pi$ ou $\frac{3\pi}{8} + k\pi$