TS2 DEVOIR DE MATHEMATIQUES pour le Lundi 5 Mai 2 008

EXERCICE 1:Soit f la fonction définie sur]0;+ ∞ [par $f(x)=x^2+x-\frac{1+\ln(x)}{x}$.On désigne par C la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) On considère la fonction auxiliaire φ définie sur]0;+ ∞ [par $\varphi(x)=2x^3+x^2+\ln(x)$.
   a. Etudier le sens de variation de φ.
   b. Démontrer que l'équation φ (x)=0 a une solution unique qu'on appellera α.
   c. En déduire le signe de $\varphi(x)$ suivant les valeurs de x.
2) a. Déterminer la limite de la fonction f en + ∞ .
   b. Déterminer la limite de f en 0. Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de C ?
   c.Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

EXERCICE 2:On modélise l'évolution du nombre de noyaux radioactifs présents à l'instant t dans un échantillon par une fonction N, définie et dérivable sur [0;+ ∞ [, telle que $N'(t)=-\lambda N(t)$ où λ est une constante réelle.
Le temps t est exprimé en secondes et λ en s^{-1}.

1) Exprimer $N(t)$ en fonction de λ, de t et du nombre N_0 de noyaux à l'instant $t=0$.
2) a. Exprimer, en fonction de λ, le temps $t_{\frac{1}{2}}$, temps au bout duquel la moitié des noyaux présents à $t=0$ se seront désintégrés.

Remarque: $t_{\frac{1}{2}}$ est appelée la demi-vie de l'élément radioactif étudié.

   b. Montrer que , pour tout $t\geqslant 0$, $N\left(t+t_{\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{2}N(t)$.Interpréter cette relation.
   c. Pour tout entier naturel k, on note N_k le nombre de noyaux à t=k × $t_{\frac{1}{2}}$.
   Quelle est la nature de la suite (N_k) ?

EXERCICE 3: L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. Soit les points
$A(0;0;2);B(3;0;0);C(0;5;0)$ et $L\left(0;0;\frac{2}{3}\right)$.
H est l'isobarycentre des points O,A,B,C. I et J sont les milieux respectifs des segments [OA] et [BC].
G est le centre de gravité du triangle BOC.

1) Faire une figure.
2) Montrer que H est le milieu du segment [IJ] et que $\overrightarrow{HA}$ +3 $\overrightarrow{HG}=\vec{0}$.
3) Montrer que la droite (LH) est incluse dans le plan AOJ et que les droites (LH) et (OJ) sont sécantes.
4) On désigne par P le point d'intersection des droites (LH) et (OJ).
   Déterminer une représentation paramétrique pour chacune des droites (LH) et (OJ) et en déduire les coordonnées de P.Quelle est la nature du quadrilatère OBPC?
5) Montrer que la droite (LH) coupe le plan (ABC) en un point S dont on déterminera les coordonnées.