

**EXERCICE 1: (2 points)**

Soit  $(u_n)$  une suite géométrique de raison 5 telle que  $u_{10}=3$ . Calculer  $u_8$  et  $u_{12}$ .

Je sais que pour une suite géométrique de raison 5:  $u_n = 5^{n-p} \times u_p$

$$\text{Donc ici : } u_8 = 5^{8-10} \times u_{10} = 5^{-2} \times 3 = \frac{3}{5^2} = \frac{3}{25} \quad \text{et} \quad u_{12} = 5^{12-10} \times u_{10} = 5^2 \times 3 = 25 \times 3 = 75$$

**EXERCICE 2: (3 points)**

Etudier le sens de variation de la fonction  $f(x) = (1-x)^2$  sur  $[1, +\infty[$  en utilisant les résultats sur le sens de variation d'une somme, du produit par une constante ou d'une composée de fonctions.

$f$  est la composée des deux fonctions suivantes:

- $x \rightarrow 1-x$  qui est une fonction affine décroissante ( $x$  est multiplié par un nombre négatif -1), définie ici sur  $[1; +\infty[$ . Comme  $x \geq 1$ , j'en déduis que  $1-x \leq 0$ . Donc les images sont des nombres négatifs.
- $x \rightarrow x^2$  Qui est la fonction carré, je sais que cette fonction est décroissante sur  $\mathbb{R}^-$  (je m'intéresse à cette fonction sur  $\mathbb{R}^-$  car  $1-x \leq 0$ )

La composée de deux fonctions décroissantes est croissante:  $f$  est croissante sur  $[1, +\infty[$

**EXERCICE 3: (8 points)**

$$\text{Soit la suite } (u_n) \text{ définie par } \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n} \end{cases}$$

1) a. Montrer que tous les termes de cette suite sont strictement positifs.

b. Etudier son sens de variation.

2) a. Montrer que la suite  $(v_n)$  définie par  $v_n = \frac{1}{u_n}$  est une suite arithmétique.

b. En déduire l'expression de  $v_n$ , puis de  $u_n$  en fonction de  $n$ .

1) a). Je peux utiliser ici un raisonnement par récurrence.

Soit la proposition  $P_n : u_n > 0$

Initialisation: Pour  $n=0$   $u_0 = 1 > 0$  donc  $P_0$  est vraie

Hérédité: Je suppose vraie  $P_n$  c'est à dire  $u_n > 0$  pour un nombre  $n \geq 0$

Par énoncé je sais que  $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}$  et je sais par hypothèse de récurrence que  $u_n > 0$ , donc  $1+u_n > 0$

Le quotient de deux nombres strictement positifs est strictement positif donc  $u_{n+1} > 0$  et  $P_{n+1}$  est vraie.

Conclusion:  $P_n$  est vraie pour tout nombre  $n \in \mathbb{N}$ .

b.) D'après a) les termes  $u_n$  sont strictement positifs et d'après l'énoncé  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1+u_n}$ , donc  $1+u_n > 1$  et

$$0 < \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \quad \text{La suite } (u_n) \text{ est décroissante.}$$

Autre méthode possible: Vous pouvez aussi étudier le signe de  $u_{n+1} - u_n$ , on trouve un nombre négatif.

2) a) Pour tout nombre  $n \in \mathbb{N}$   $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{1+u_n}{u_n} - \frac{1}{u_n} = \frac{1+u_n-1}{u_n} = \frac{u_n}{u_n} = 1$  donc  $(v_n)$  est une suite

arithmétique de raison 1.

b) D'après les résultats sur les suites arithmétiques:  $v_n = v_0 + n \times \text{raison} = 1 + n$

$$v_n = \frac{1}{u_n} \quad \text{donc} \quad u_n = \frac{1}{v_n} = \frac{1}{1+n} \quad \text{pour tout nombre } n \in \mathbb{N}.$$

#### EXERCICE 4: (4 points)

Soit  $(u_n)$  la suite définie par :  $u_0=2$  et  $u_{n+1}=3u_n-5$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$  :

$$u_n = -\frac{1}{2}(3^n - 5)$$

Soit la proposition  $P_n : u_n = -\frac{1}{2}(3^n - 5)$

Initialisation: Par hypothèse  $u_0=2$  pour  $n=0$   $-\frac{1}{2}(3^0 - 5) = -\frac{1}{2}(3^0 - 5) = -\frac{1}{2}(1 - 5) = -\frac{1}{2} \times (-4) = 2$

Donc  $P_0$  est vraie

Hérédité: Je suppose  $P_n$  vraie pour un nombre  $n \geq 0$ .

Par hypothèse:  $u_{n+1} = 3u_n - 5$

$$u_{n+1} = 3u_n - 5 = 3 \times \left( -\frac{1}{2}(3^n - 5) \right) - 5 = -\frac{3}{2} \times 3^n + \frac{3}{2} \times 5 - 5 = -\frac{1}{2} \times 3^{n+1} + \frac{15}{2} - \frac{10}{2} = -\frac{1}{2} \times 3^{n+1} + \frac{5}{2} = -\frac{1}{2}(3^{n+1} - 5)$$

Donc  $P_{n+1}$  est vraie.

Conclusion:  $P_n : u_n = -\frac{1}{2}(3^n - 5)$  est vraie pour tout nombre  $n \in \mathbb{N}$ .

#### EXERCICE 5 : (3 points)

Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.

Soit  $(u_n)$  la suite définie pour tout  $n \geq 1$  par :  $u_1=0$  et  $u_{n+1} = \frac{1}{2-u_n}$

Quelle est la valeur exacte du 999<sup>e</sup> terme de cette suite?

$$u_1=0 \quad u_2 = \frac{1}{2-0} = \frac{1}{2} \quad u_3 = \frac{1}{2-\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} \quad u_4 = \frac{1}{2-\frac{2}{3}} = \frac{3}{4}, \text{ il semble que: } u_n = \frac{n-1}{n}$$

Raisonnement par récurrence: Soit  $P_n : u_n = \frac{n-1}{n}$

Initialisation:  $u_1=0$   $\frac{1-1}{1}=0$   $P_1$  est vraie

Hérédité: Je suppose  $P_n$  vraie pour un nombre  $n \geq 0$ .

Par hypothèse  $u_{n+1} = \frac{1}{2-u_n}$  donc  $u_{n+1} = \frac{1}{2-\frac{n-1}{n}} = \frac{n}{2n-(n-1)} = \frac{n}{n+1}$ . Alors  $P_{n+1}$  est vraie.

Conclusion:  $P_n : u_n = \frac{n-1}{n}$  est vraie pour tout nombre  $n \in \mathbb{N}$ .

$$u_{999} = \frac{999-1}{999} = \frac{998}{999}$$