

LE RAISONNEMENT PAR RECURRENCE

Quand vous faites un raisonnement par récurrence vous devez suivre le plan suivant:

Si c'est vous qui décidez de faire un raisonnement par récurrence vous l'annoncez à la personne qui va lire la copie.

<p>Plan</p>	<p>Exemple: Soit (u_n) la suite définie par : $u_0=2$ et $u_{n+1}=3u_n-5$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n : $u_n = -\frac{1}{2}(3^n - 5)$</p>
<p>Vous énoncez la proposition P_n</p>	<p>Soit la proposition $P_n : u_n = -\frac{1}{2}(3^n - 5)$</p>
<p>Initialisation: Vous vérifiez que cette proposition est vraie au rang n_0.</p>	<p>Par hypothèse $u_0=2$ et pour $n=0$ $-\frac{1}{2}(3^n - 5) = -\frac{1}{2}(3^0 - 5) = -\frac{1}{2}(1 - 5) = -\frac{1}{2} \times (-4) = 2$ Donc $u_0 = -\frac{1}{2}(3^0 - 5)$ P_0 est vraie</p>
<p>Hérédité: Vous supposez que cette proposition P_n est vraie pour un nombre $n \geq n_0$. Vous allez démontrer que $P_n \Rightarrow P_{n+1}$ Donc vous devez arriver à la conclusion P_{n+1} est vraie en utilisant l'hypothèse de récurrence (à savoir P_n vraie pour n) et les hypothèses données dans l'énoncé.</p>	<p>Je suppose P_n vraie pour un nombre $n \geq 0$. Donc par hypothèse de récurrence: pour ce nombre n $u_n = -\frac{1}{2}(3^n - 5)$ Par hypothèse (dans l'énoncé): $u_{n+1} = 3u_n - 5$ $u_{n+1} = 3u_n - 5 = 3 \times \left(-\frac{1}{2}(3^n - 5)\right) - 5$ $= -\frac{3 \times 3^n}{2} + \frac{5 \times 3}{2} - 5 = -\frac{3^{n+1}}{2} + \frac{15}{2} - \frac{10}{2} = -\frac{3^{n+1}}{2} + \frac{5}{2}$ $= -\frac{1}{2}(3^{n+1} - 5)$ Donc P_{n+1} est vraie.</p>
<p>Conclusion de la démonstration: P_n est vraie pour tous les nombres n.</p>	<p>$P_n : u_n = -\frac{1}{2}(3^n - 5)$ est vraie pour tout nombre $n \in \mathbb{N}$.</p>

En suivant ce plan pour les raisonnements par récurrence faire les exercices suivants:

EXERCICE 1:

Soit a un nombre réel positif.

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$1 + na \leq (1 + a)^n$$

EXERCICE 2:

La suite u est définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout n appartenant à \mathbb{N} , $u_{n+1} = 2u_n + 1$.

Démontrer par récurrence que tous les termes de la suite u sont positifs.

EXERCICE 3: La suite u_n est définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n , par $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$

- 1) Etudiez la monotonie de la suite (u_n) .
- 2) Démontrer que pour tout entier naturel n : $u_n > n^2$.

