EXERCICE 1: DEMONSTRATION DE L'INEGALITE DE BERNOUILLI

a est un réel strictement positif.

1) Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$. $(1+a)^n \geqslant 1+na$
2) Déduisez-en la justification d'un théorème (admis) en classe de première: si $q>1$, alors $\lim_{n \to +\infty} q^n = +\infty$.

EXERCICE 2: Démontrer par récurrence que la proposition P_n : « $3^{2n+1}+2^{n+2}$ est un multiple de 7 » est vraie pour tout entier naturel.

EXERCICE 3 : (u_n) est la suite définie par $u_0=1$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1}=\dfrac{u_n}{u_n+2}$

1) Calculez les 6 premiers termes de la suite et conjecturez l'expression de u_n en fonction de n .
2) Utilisez un raisonnement par récurrence pour déterminer l'expression de u_n en fonction de n .

EXERCICE 4: La suite u_n est définie par $u_0=2$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1}=\sqrt{u_n+1}$.

Démontrer que :

a) pour tout n , $u_n>-1$ et que la suite est bien définie pour tout n ;

b) la suite (u_n) est monotone;

c) pour tout n , $u_n \geqslant \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

EXERCICE 5: La suite (u_n) est définie par $u_1=0$ et pour tout entier naturel n , par $u_{n+1}=\dfrac{1}{2-u_n}$.

Donner la valeur exacte de u_{2006} .

EXERCICE 6:

1) a) Calculez les 5 premiers termes de la suite (u_n) définie par $u_1=\dfrac{1}{2}$ et pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1}=\left(\dfrac{n+1}{2n}\right)u_n$.

b) Démontrer par récurrence que $u_n=\dfrac{n}{2^n}$.

2) k est un entier naturel non nul, (y_n) est la suite définie par $v_1=\dfrac{1}{k}$ et pour tout entier naturel non nul n , $v_{n+1}=\left(\dfrac{n+1}{kn}\right)v_n$. Conjecturez l'expression de v_n en fonction de n et prouvez votre conjecture par récurrence.