Correction des exercices 55, 56 et 57 page 279

Exercice 55 page 279 :

1°) $z_1 = -1 - i$.

On a : $|z_1| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$; notons $\theta = \arg(z_1)$. On cherche $\theta \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \text{ ; on peut donc choisir } \theta = \frac{5\pi}{4}$$

<u>Conclusion :</u> Une forme trigonométrique de z_1 est : $\boxed{z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)}$

2°) $z_2 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$.

On a : $|z_2| = \sqrt{\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{4}{4}} = 1$; notons $\theta = \arg(z_2)$. On cherche $\theta \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\begin{cases} \cos\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{1}{2} \end{cases} \text{ ; on peut donc choisir } \theta = \frac{5\pi}{6}$$

<u>Conclusion :</u> Une forme trigonométrique de z_2 est : $\boxed{z_2 = \left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)}$

3°) $z_3 = 5i$.

On a : $|z_3| = \sqrt{(5)^2} = 5$; notons $\theta = \arg(z_3)$. On cherche $\theta \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\begin{cases} \cos\theta = 1 \\ \sin\theta = 0 \end{cases} \text{ ; on peut donc choisir } \theta = \frac{\pi}{2}$$

<u>Conclusion :</u> Une forme trigonométrique de z_3 est : $\boxed{z_3 = 5\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)}$

4°) $z_4 = 1 - i\sqrt{3}$.

On a : $|z_3| = \sqrt{1^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2$; notons $\theta = \arg(z_4)$. On cherche $\theta \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{1}{2} \\ \sin\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$; on peut donc choisir $\theta = -\dfrac{\pi}{3}$

<u>Conclusion :</u> Une forme trigonométrique de z_4 est : $\boxed{z_4 = 2\left(\cos -\dfrac{\pi}{3} + i\sin -\dfrac{\pi}{3}\right)}$

Exercice 56 page 279 :

1°) $z_1 = 2(1+i)$.

On a : $|z_1| = |2| \times |1+i| = 2 \times \sqrt{1^2+1^2} = 2\sqrt{2}$; notons $\theta = \arg(z_1)$.

On a : $\theta = \arg(2) + \arg(1+i) \quad [2\pi]$

Or $\arg(2) = 0$ et $\arg(1+i) = \dfrac{\pi}{4} \quad [2\pi]$

<u>Conclusion :</u> Une forme trigonométrique de z_1 est : $\boxed{z_1 = 2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)}$

2°) $z_2 = (1-i)\left(1+i\sqrt{3}\right)$.

On a : $|z_2| = |1-i| \times \left|1+i\sqrt{3}\right| = \sqrt{2} \times 2 = 2\sqrt{2}$; notons $\theta = \arg(z_2)$.

On a : $\theta = \arg(1-i) + \arg\left(1+i\sqrt{3}\right) \quad [2\pi]$

En notant $\theta_1 = \arg(1-i)$ et $\theta_2 = \arg\left(1+i\sqrt{3}\right)$, on cherche $\theta_1 \in \mathbb{R}$ et $\theta_2 \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\begin{cases} \cos\theta_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_1 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$; on peut donc choisir $\theta_1 = \dfrac{7\pi}{4}$

et $$\begin{cases} \cos\theta_2 = \dfrac{1}{2} \\ \sin\theta_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$; on peut donc choisir $\theta_2 = \dfrac{\pi}{3}$

Ainsi $\theta = \dfrac{7\pi}{4} + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{25\pi}{12} = 2\pi + \dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\pi}{12} \quad [2\pi]$

<u>Conclusion :</u> Une forme trigonométrique de z_2 est : $\boxed{z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{12} + i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)}$

3°) $z_3 = \dfrac{-\sqrt{2} - i\sqrt{6}}{i} = \sqrt{2}i - \sqrt{6} = -\sqrt{6} + i\sqrt{2}$.

On a : $|z_3| = \sqrt{\left(-\sqrt{6}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{6+2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$; notons $\theta = \arg(z_3)$; on cherche $\theta \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{-\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$; on peut donc choisir $\theta = \dfrac{5\pi}{6}$

<u>Conclusion :</u> Une forme trigonométrique de z_3 est : $\boxed{z_3 = 2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{5\pi}{6} + i\sin\dfrac{5\pi}{6}\right)}$

4°) $z_4 = \dfrac{5(-1+i)}{\sqrt{3}+i}$.

On a : $|z_4| = \dfrac{|5(-1+i)|}{|\sqrt{3}+i|} = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$; notons $\theta = \arg(z_4)$.

On a : $\theta = \arg(5(-1+i)) - \arg\left(\sqrt{3}+i\right) \quad [2\pi]$

En notant $\theta_1 = \arg(5(-1+i))$ et $\theta_2 = \arg\left(\sqrt{3}+i\right)$, on cherche $\theta_1 \in \mathbb{R}$ et $\theta_2 \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\begin{cases} \cos\theta_1 = \dfrac{-5}{5\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_1 = \dfrac{5}{5\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$; on peut donc choisir $\theta_1 = \dfrac{3\pi}{4}$

et $\begin{cases} \cos\theta_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_2 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$; on peut donc choisir $\theta_2 = \dfrac{\pi}{6}$

Ainsi $\theta = \dfrac{3\pi}{4} - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{7\pi}{12} \quad [2\pi]$

<u>Conclusion :</u> Une forme trigonométrique de z_4 est : $\boxed{z_4 = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}\left(\cos\dfrac{7\pi}{12} + i\sin\dfrac{7\pi}{12}\right)}$

<u>Exercice 57 page 279 :</u>

1°) $z_1 = \left(\dfrac{\sqrt{3}-i}{i}\right)^2 = \left(-1-i\sqrt{3}\right)^2$.

On a : $|z_1| = \left|-1-i\sqrt{3}\right|^2 = 2^2 = 4$; notons $\theta = \arg(z_1)$.

On a : $\theta = \arg\left[\left(-1-i\sqrt{3}\right)^2\right] = 2\arg\left(-1-i\sqrt{3}\right) \quad [2\pi]$

En notant $\theta_1 = \arg\left(-1-i\sqrt{3}\right)$, on cherche $\theta_1 \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\begin{cases} \cos\theta_1 = -\dfrac{1}{2} \\ \sin\theta_1 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \text{ ; on peut donc choisir } \theta_1 = \frac{4\pi}{3}$$

Ainsi $\theta = 2\times\dfrac{4\pi}{3} = \dfrac{8\pi}{3} = 2\pi + \dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{3} \quad [2\pi]$

<u>Conclusion :</u> Une forme trigonométrique de z_1 est : $\boxed{z_1 = 4\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)}$

2°) $z_2 = (1+i)^3$.

On a : $|z_2| = |1+i|^3 = \left(\sqrt{2}\right)^3 = 2\sqrt{2}$; notons $\theta = \arg(z_2)$.

On a : $\theta = \arg\left[(1+i)^3\right] = 3\arg(1+i) \quad [2\pi]$

En notant $\theta_1 = \arg(1+i)$, on cherche $\theta_1 \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\begin{cases} \cos\theta_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \text{ ; on peut donc choisir } \theta_1 = \frac{\pi}{4}$$

Ainsi $\theta = 3\times\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4} \quad [2\pi]$

<u>Conclusion :</u> Une forme trigonométrique de z_2 est : $\boxed{z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)}$