Chapitre N

Géométrie dans l'espace

Attendus de fin de cycle 4

- ► ***Représenter l'espace.***
- ► ***Calculer avec des grandeurs mesurables ; exprimer les résultats dans les unités adaptées.***

Les connaissances à acquérir

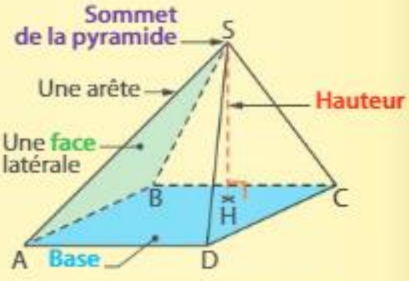
Connaître: ***Les représentations des solides usuels, les tableaux de conversion des différentes unités, les formules d'aire des figures du plan, les formules de volume des solides de l'espace***

	Les compétences à travailler
N❶	**Je connais, représente les pyramides et calcule leur volume**
N❷	**Je connais, représente les cônes de révolution et calcule leur volume**
N❸	**Je connais, représente les solides usuels vus depuis le début du collège et calcule leur volume**

Objectif N1 | Je connais, représente les pyramides et calcule leur volume

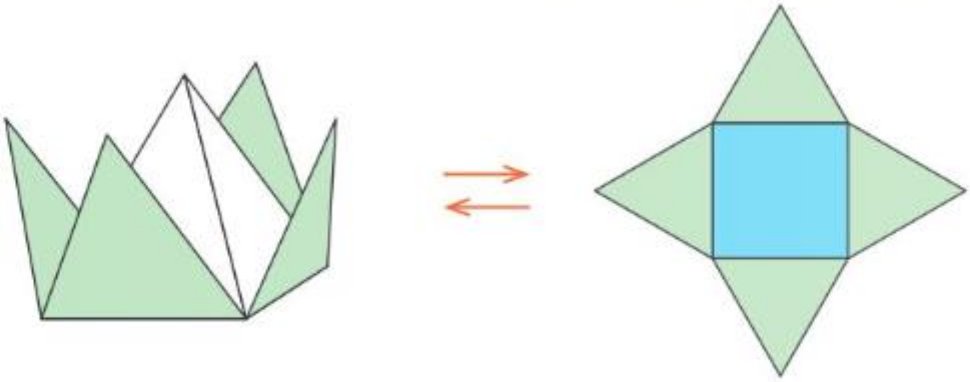
Définitions

- Une pyramide de **sommet** S est un solide dont :
  - la **base** est un polygone (triangle, quadrilatère…) ;
  - les **faces latérales** sont des triangles de sommet S.
- La **hauteur** d'une pyramide de sommet S est le segment [SH] perpendiculaire au plan de la base, où H est un point de ce plan.



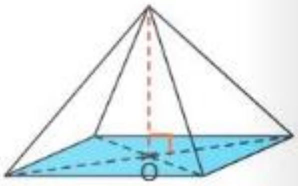
Vue en perspective cavalière

Patron d'une pyramide à base carrée



Remarques

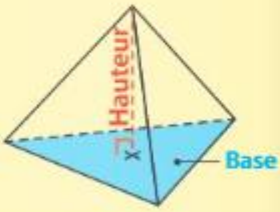
- Une pyramide dont la base est un triangle est appelée un **tétraèdre**.
- Un **polygone régulier** est un polygone dont tous les côtés sont de même longueur et dont tous les angles sont de même mesure. Ses sommets appartiennent tous à un même cercle dont le centre est appelé centre du polygone.
- Une pyramide régulière est une pyramide dont la base est un polygone régulier et dont la hauteur passe par le centre de sa base. Ses faces latérales sont des triangles isocèles égaux.



Propriété

- Le volume $\mathcal{V}$ d'une pyramide est donné par la formule :

$$\mathcal{V} = \frac{\text{aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}$$



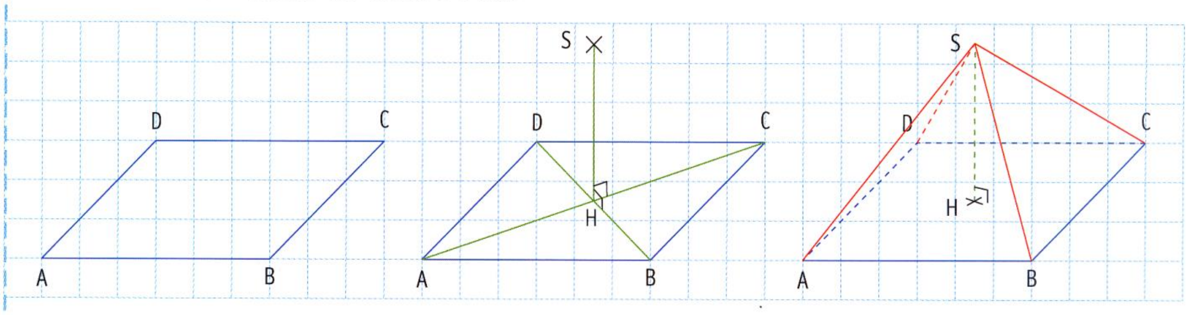
Exemple

Le volume d'une pyramide à base carrée de côté 4 cm et de hauteur 6 cm est donné par le calcul :

$$\mathcal{V} = \frac{4\text{ cm} \times 4\text{ cm} \times 6\text{ cm}}{3} = 32\text{ cm}^3$$

Méthode N°1 — Représenter une pyramide en perspective cavalière

Représentation en perspective cavalière d'une pyramide régulière à base ABCDS carrée telle que AB = 3 cm et la hauteur SH mesure 2 cm.



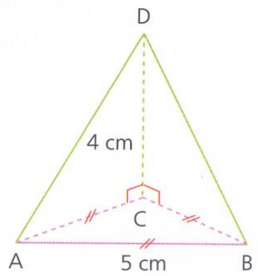
① On dessine d'abord la base carrée. Les côtés [AB] et [CD] vus de face sont dessinés en vraie grandeur.

② La pyramide est régulière donc on détermine le centre H du carré, puis on trace la hauteur [SH] verticale et en vraie grandeur.

③ On trace les arêtes latérales et on met en pointillés les arêtes cachées. On gomme les diagonales du carré.

Méthode N°2 — Construire un patron de pyramide

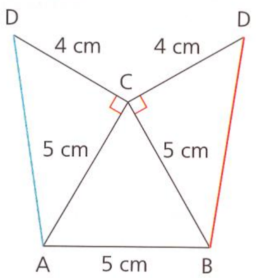
Énoncé **Construire un patron de la pyramide à base triangulaire ABCD représentée ci-contre.**



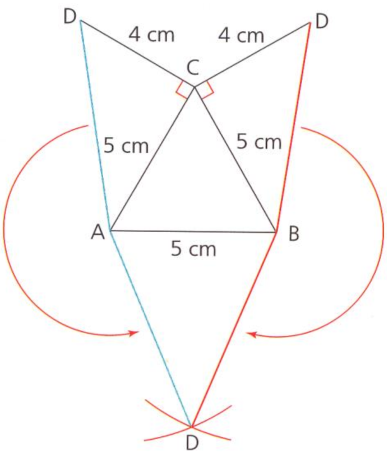
Solution

La face ABC est un triangle équilatéral de côté 5 cm.
Les faces DCB et DCA sont des triangles rectangles en C dont les côtés de l'angle droit mesurent 5 cm et 4 cm.

On commence par identifier les faces que l'on peut construire (nature et dimensions).



On construit les faces ABC, DCB et DCA de la pyramide ABCD.

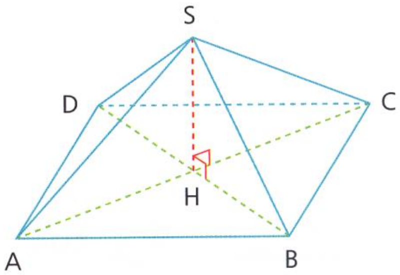


On trace la quatrième face ABD en reportant les longueurs AD et BD avec un compas.

Regarder cette vidéo : https://youtu.be/GXkxA__A44A

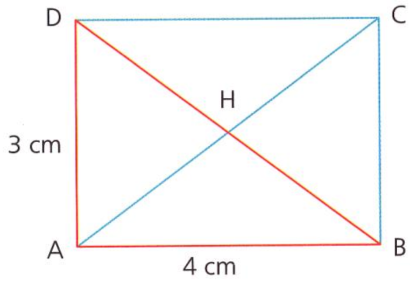
Méthode N°3 — Calculer une longueur dans l'espace

Énoncé **La pyramide à base rectangulaire SABCD représentée ci-contre est telle que : SH = 2 cm, AB = 4 cm et AD = 3 cm.**
Calculer la longueur SB.
On donnera l'arrondi au millimètre.



Solution

- **Calcul de HB**



On cherche une figure plane contenant le segment [SB] et à partir de laquelle on pourra calculer la longueur SB.
Le triangle SHB est rectangle en H, donc, d'après le théorème de Pythagore :
$SB^2 = SH^2 + HB^2$.
On connaît SH, donc, pour pouvoir calculer SB, il faut commencer par calculer HB.
Pour cela, on considère le rectangle ABCD.

ABCD est un rectangle, donc le triangle ABD est rectangle en A.
D'où, d'après le théorème de Pythagore :
$BD^2 = AB^2 + AD^2$
$BD^2 = 4^2 + 3^2$
$BD^2 = 16 + 9 = 25.$
Or BD est
Donc : BD = 5 cm.

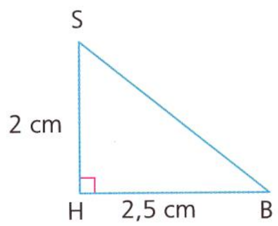
On commence par calculer la longueur de la diagonale [BD] du rectangle ABCD.

ABCD est un rectangle et ses diagonales se coupent en H.
Or, les diagonales d'un rectangle se coupent en leur milieu, donc H est le milieu de [BD].

On calcule ensuite HB en utilisant la propriété des diagonales d'un rectangle.

Ainsi : $HB = \dfrac{BD}{2} = \dfrac{5}{2} = 2{,}5.$
D'où : HB = 2,5 cm.

- **Calcul de SB**



On peut maintenant calculer SB en utilisant le triangle SHB, rectangle en H.

Le triangle SHB est rectangle en H, donc, d'après le théorème de Pythagore :
$SB^2 = SH^2 + HB^2$
$SB^2 = 2^2 + 2{,}5^2 = 10{,}25.$

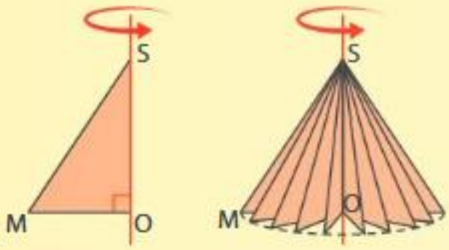
Donc : $SB = \sqrt{10{,}25} \approx 3{,}20.$

La valeur arrondie au millimètre de SB est 3,2 cm.

Objectif N2 Je connais, représente les cônes de révolution et calcule leur volume

Définition

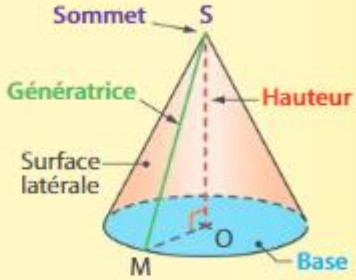
Un **cône de révolution** de sommet S est un solide obtenu par la rotation d'un triangle SOM rectangle en O, autour de la droite (SO).



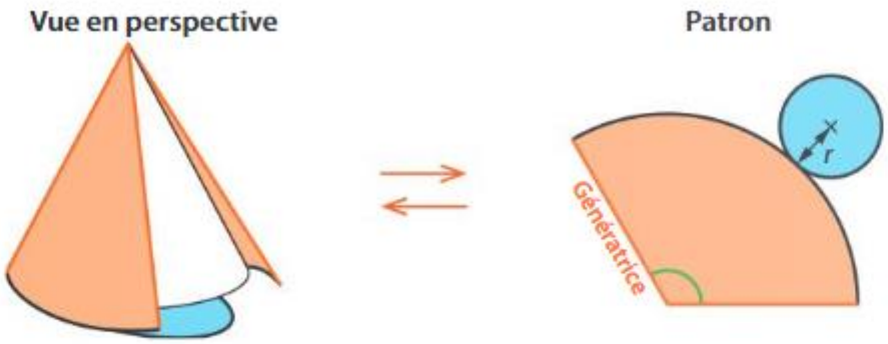
Définitions

On considère un cône généré par un triangle SOM rectangle en O.

- Le disque de centre O et de rayon OM est la **base** du cône.
- Le segment [MS] est appelé une **génératrice** du cône.
- Le point S est appelé le **sommet** du cône.
- Le segment [SO] est appelé la **hauteur** du cône.



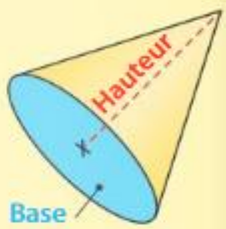
Vue en perspective cavalière



Propriété

- Le volume $\mathcal{V}$ d'un cône de révolution est donné par la formule :

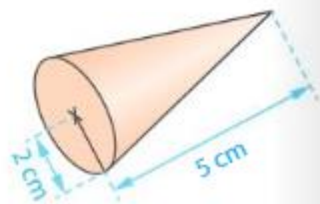
$$\mathcal{V} = \frac{\text{aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}$$



Exemple

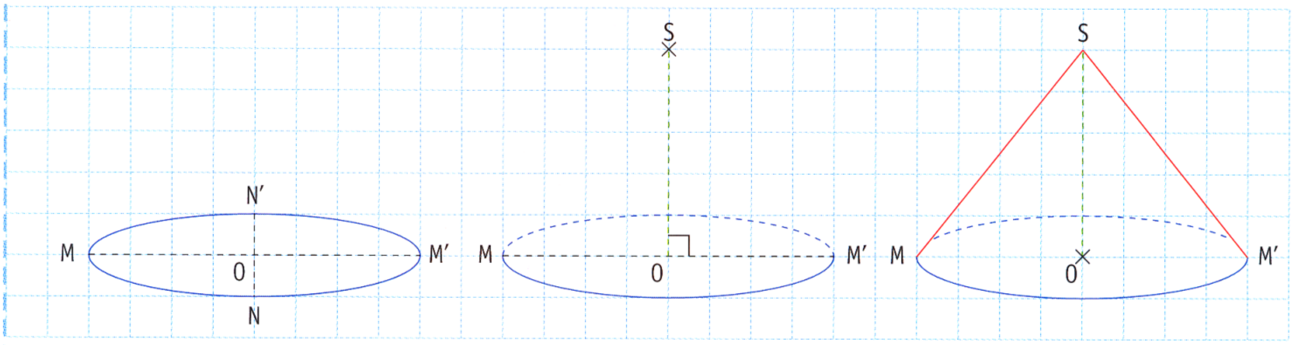
Le volume d'un cône de hauteur 5 cm et de base un disque de rayon 2 cm est donné par le calcul :

$$\mathcal{V} = \frac{\pi \times 2\text{ cm} \times 2\text{ cm} \times 5\text{ cm}}{3} = \frac{20\pi\text{ cm}^3}{3} \approx 21\text{cm}^3$$



Méthode N°4 — Représenter un cône de révolution en perspective cavalière

Représentation en perspective cavalière d'un cône de révolution dont le rayon de la base est 2 cm et la hauteur 2,5 cm.



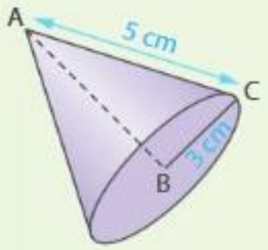
① On dessine d'abord le disque de base. Le diamètre [MM′] vu de face et dessiné en vraie grandeur.

② Le sommet S est à la verticale du point O. La hauteur [OS] est tracée en vraie grandeur.

③ On trace les génératrices [SM] et [SM′] vues de face et on met en pointillés les parties cachées.

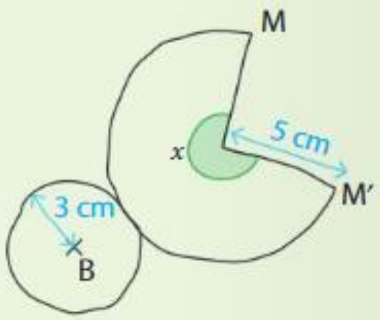
Méthode N°5 — Construire un patron de cône de révolution

Construire un patron du cône ci-dessous.



Solution

On commence par faire un patron à main levée, puis on calcule la longueur du cercle de rayon 3 cm qui correspond à la longueur de l'arc de cercle entre M et M′.



Longueur de l'arc de cercle entre M et M′ :
$2 \times \pi \times 3 \text{ cm} = 6\pi \text{ cm}$

On calcule ensuite la mesure de l'angle x, sachant que la longueur d'un arc de cercle est proportionnelle à la mesure de son angle.

Mesure de l'angle (en °)	360	x
Longueur de l'arc (en cm)	10π	6π

$\times \frac{360}{10\pi}$

$x = \frac{6\pi \times 360°}{10\pi} \approx 216°$. On peut alors construire le patron en vraie grandeur.

EXERCICES

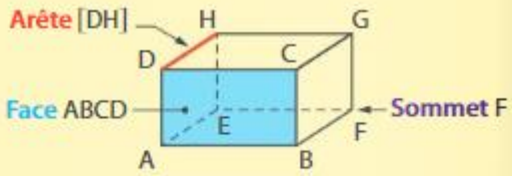
- ☐ Faire les exercices 1 à 8 p 106-107 du cahier de compétences
- ☐ Faire les exercices 10 à 17 p 108-109 du cahier de compétences

Objectif N3 Je me repère dans un parallélépipède rectangle (pavé droit)

1 Définitions

Définition

Un **parallélépipède rectangle**, appelé aussi **pavé droit**, est un solide qui a 6 faces rectangulaires, 8 sommets et 12 arêtes.



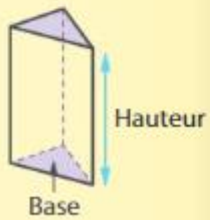
Remarques

- Un pavé droit est un prisme droit particulier dont la base est un rectangle.
- Un cube est un pavé droit particulier dont les 6 faces sont des carrés superposables.

Propriété

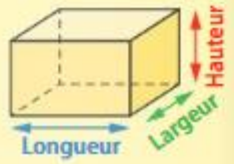
Le volume d'un prisme droit, et donc d'un pavé droit, est donné par la formule :

$$\mathcal{V} = \text{aire de la base} \times \text{hauteur}$$



Dans le cas du pavé droit, cette formule peut aussi s'écrire :

$$\mathcal{V} = \text{longueur} \times \text{largeur} \times \text{hauteur}$$



2 Repérage dans un pavé droit

VIDEO Regarder cette vidéo : https://drive.google.com/file/d/1tqPFHpP9HLOVxl0nRjNL5LyeXqOKiKtR/view?usp=sharing

Définition

Tout point M d'un parallélépipède rectangle peut être repéré à partir d'un sommet et des arêtes partant de ce sommet. Un point M est repéré par trois nombres, appelés les coordonnées de M :

- x_M est son abscisse ;
- y_M est son ordonnée ;
- z_M est son altitude.

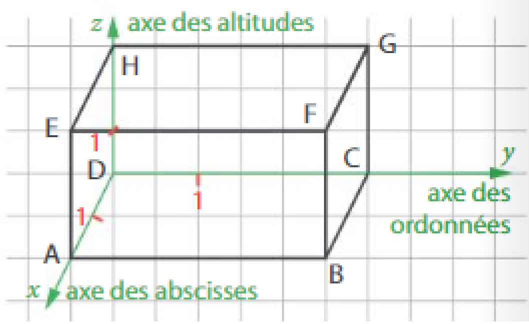
On note : $M(x_M ; y_M ; z_M)$.

Exemple

Dans le repère tracé ci-contre :

- D est l'origine du repère ;
- la droite (Dx) est l'axe des abscisses ;
- la droite (Dy) est l'axe des ordonnées ;
- la droite (Dz) est l'axe des altitudes.
- Coordonnées de quelques points :

D(0 ; 0 ; 0)	A(2 ; 0 ; 0)	C(0 ; 3 ; 0)
H(0 ; 0 ; 3)	B(2 ; 3 ; 0)	F(2 ; 3 ; 3)

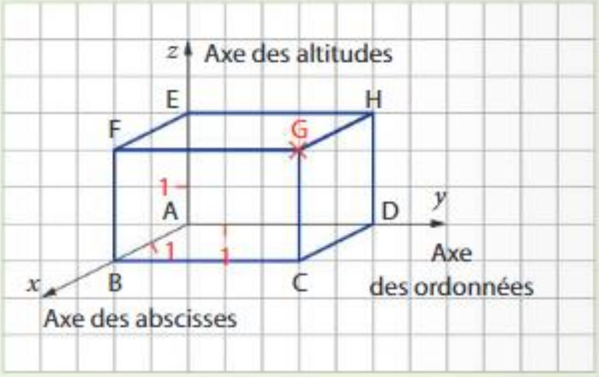


Méthode N6 — Se repérer dans un pavé droit

On considère le parallélépipède rectangle ABCDEFGH et le repère d'origine A ci-contre.

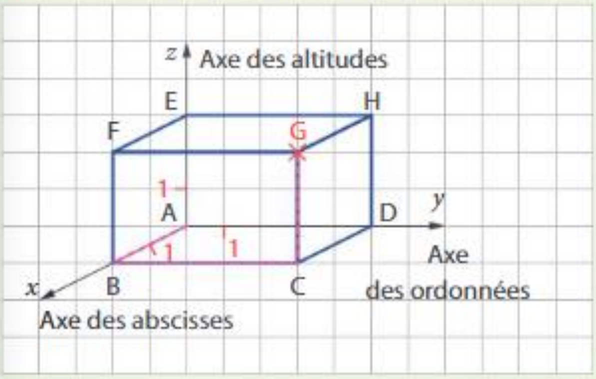
1. Donner les coordonnées du point G.

2. Placer le point I de coordonnées (2 ; 4 ; 2) et préciser à quelle face il appartient.



Solution

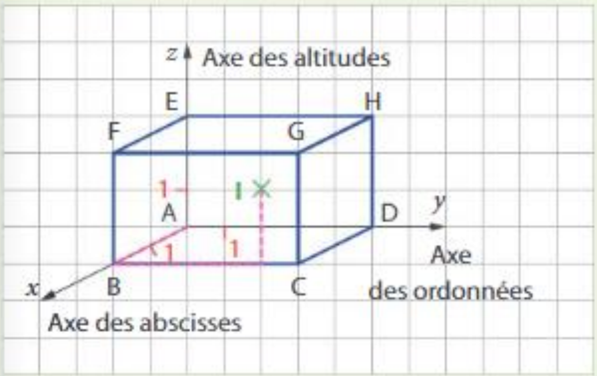
1. Les coordonnées du point G sont (2 ; 5 ; 3).



En partant de A, on avance de :
- 2 unités suivant l'axe des abscisses (Ax) ;
- 5 unités suivant l'axe des ordonnées (Ay) ;
- 3 unités suivant l'axe des altitudes (Az).

Fais attention à l'ordre des coordonnées !

2.



En partant de A, on avance de :
- 2 unités suivant l'axe des abscisses (Ax) ;
- 4 unités suivant l'axe des ordonnées (Ay) ;
- 2 unités suivant l'axe des altitudes (Az).

Le point I appartient à la face FGCB.

VIDEO Regarder cette vidéo : https://youtu.be/OTUHNsf1Gek

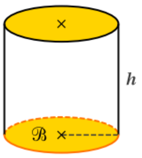
EXERCICES ☐ **Faire les exercices 19 à 24 p 110-111 du cahier de compétences**

Objectif N4 Je connais, représente les solides usuels et calcule leur volume

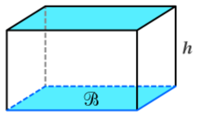
Les solides à connaître

Deux bases

Cylindre
- Deux bases circulaires identiques.
- Une face latérale rectangulaire.

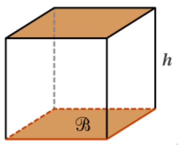


Pavé droit
- 6 faces rectangulaires.
- 8 sommets.
- 12 arêtes.

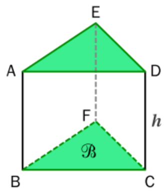


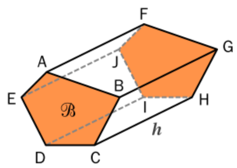
Un pavé droit est un prisme droit particulier.

Cube
- 6 faces carrées.
- 8 sommets.
- 12 arêtes.



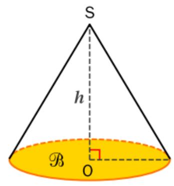
Prisme droit
- Deux bases polygonales identiques.
- Faces latérales rectangulaires.



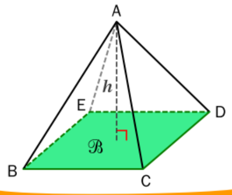


À pointe

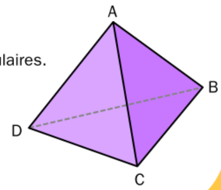
Cône
- Une base circulaire.
- Un sommet principal.



Pyramide
- Une base polygonale.
- Un sommet principal.

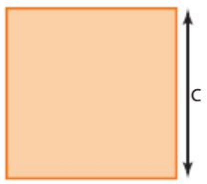


Tétraèdre
- 4 faces triangulaires.
- 4 sommets.
- 6 arêtes.



Les formules à connaître : Aires et périmètres

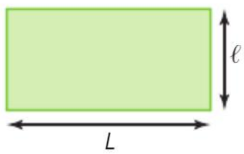
Carré



$\mathcal{A} = c^2$

$p = 4 \times c$

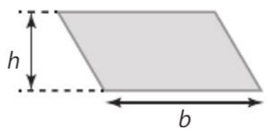
Rectangle



$\mathcal{A} = L \times \ell$

$p = 2 \times (L + \ell)$

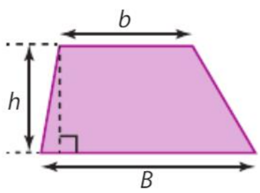
Parallélogramme



$\mathcal{A} = b \times h$

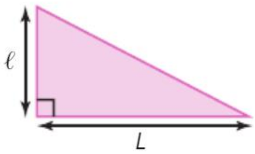
$p = 2 \times (L + \ell)$

Trapèze



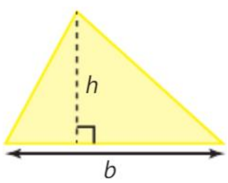
$\mathcal{A} = \dfrac{(b + B) \times h}{2}$

Triangle rectangle



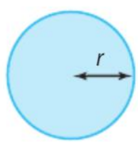
$\mathcal{A} = \dfrac{L \times \ell}{2}$

Triangle quelconque



$\mathcal{A} = \dfrac{b \times h}{2}$

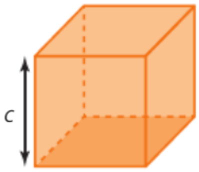
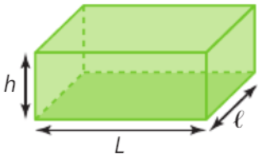
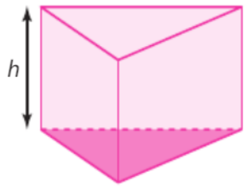
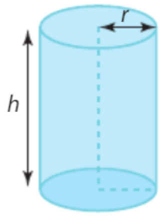
Disque

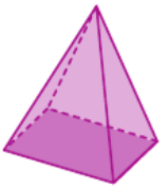
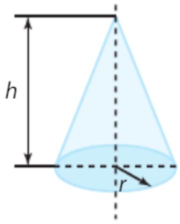


$\mathcal{A} = \pi \times r^2$

$p = 2 \pi r$

Les formules à connaître :
Volumes

Cube	Parallélépipède rectangle ou pavé	Prisme droit	Cylindre
			
$\mathcal{V}=\mathcal{A}_{\text{base}}\times h=c^3$	$\mathcal{V}=\mathcal{A}_{\text{base}}\times h=L\times \ell\times h$	$\mathcal{V}=\mathcal{A}_{\text{base}}\times h$	$\mathcal{V}=\mathcal{A}_{\text{base}}\times h=\pi\times r^2\times h$

Pyramide	Cône de révolution
	
$\mathcal{V}=\dfrac{\mathcal{A}_{\text{base}}\times h}{3}$	$\mathcal{V}=\dfrac{\mathcal{A}_{\text{base}}\times h}{3}=\dfrac{\pi r^2\times h}{3}$

EXERCICES

- ☐ **Faire les exercices 27 p 112 du cahier de compétences**
- ☐ **Faire les exercices 28-29 p 113 du cahier de compétences**
- ☐ **Faire l'exercice 30-31 p 114 du cahier de compétences**
- ☐ **Faire l'exercice 32 p 115 du cahier de compétences**