Antécédents d'un nombre par une fonction

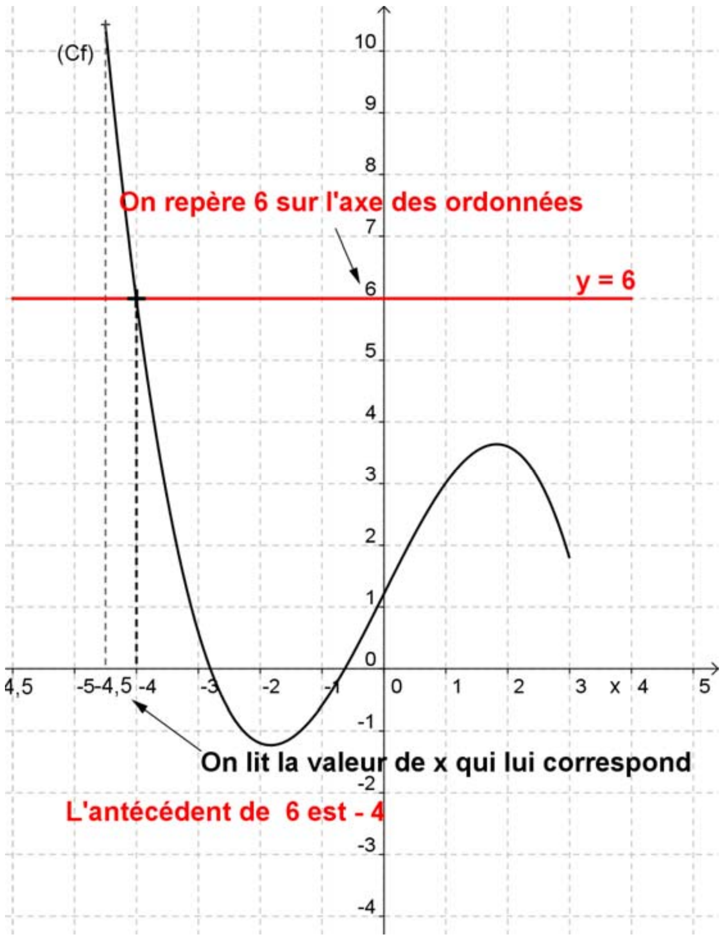
1) Par lecture graphique

Méthode / Explications :

Pour déterminer le ou les antécédents d'un nombre a donné, on trace la droite (d) d'équation $y = a$.
On lit les abscisses des points d'intersection de la courbe (C) et de la droite (d).
Les antécédents se lisent en abscisses !!!!

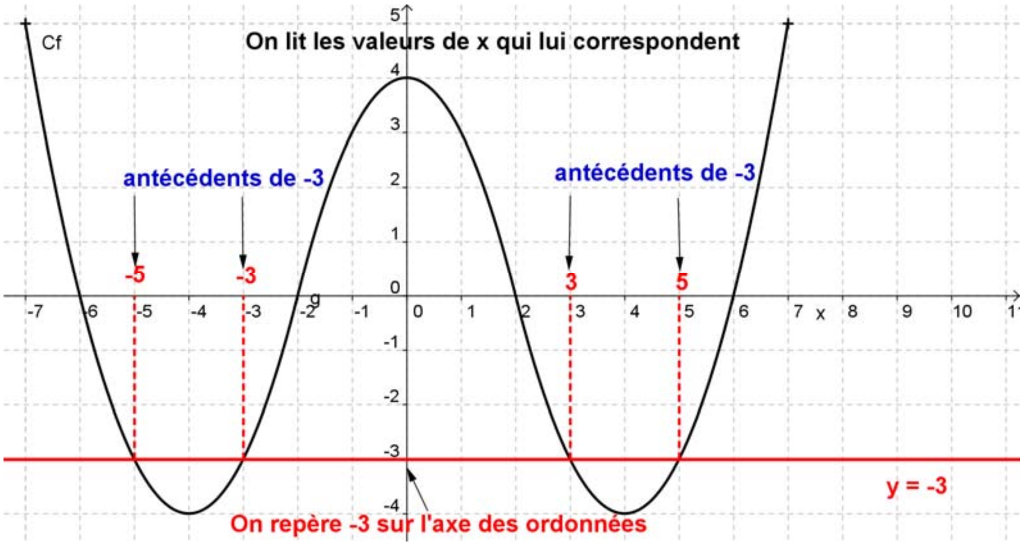
Exercice 1 : Nous avons tracé ci-dessous la courbe représentative de la fonction f.
Déterminez sur le graphique ci-dessous le ou le(s) antécédents de 6 par f

Réponse :



Exercice 2 : Nous avons tracé ci-dessous la courbe représentative de la fonction f.
Déterminez sur le graphique ci-dessous le ou le(s) antécédents de -3 par f

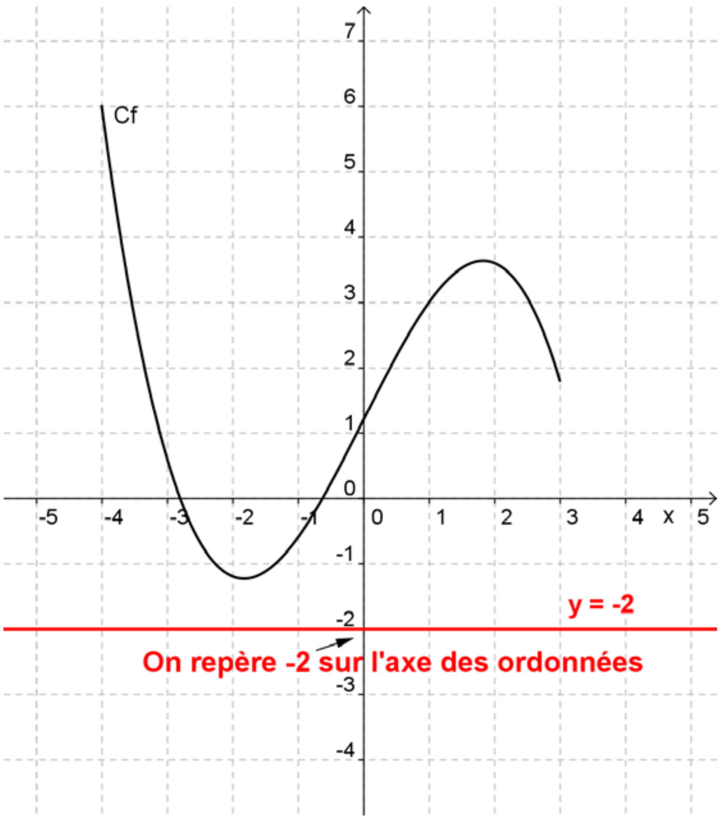
Réponse :



Les antécédents de -3 sont : -5 ; -3 ; 3 et 5

Exercice 3: Nous avons tracé ci-dessous la courbe représentative de la fonction f.
Déterminez sur le graphique ci-dessous le ou le(s) antécédents de-2 par f

Réponse :



La courbe représentative de la fonction f et la droite d'équation y = -2 n'ont pas de point d'intersection : La fonction f n'admet aucun antécédent de -2

2) A partir de l'expression de la fonction f

a) Par le calcul simplement

Méthode / Explications : Pour calculer le ou les antécédents du nombre a par f, s'il y en a , on résout l'équation $f(x) = a$

Exercice 1 : Déterminer, le ou les antécédents de 2 ; -2 ; 0 par la fonction f définie par : $f(x) = x^2$

Réponse :

• Pour calculer le ou les antécédents de 2, il suffit de résoudre l'équation: $f(x)$ = 2

C'est à dire :

$x^2 = 2$ **qui a pour solutions :**

$x = \sqrt{2}$ **ou** $x = -\sqrt{2}$

Les antécédents de 2 par f sont $\sqrt{2}$ et - $\sqrt{2}$

• Pour calculer le ou les antécédents de -2, il suffit de résoudre l'équation: $f(x)$ = -2

C'est à dire :

$x^2 = -2$

Un nombre au carré ne pouvant être négatif, l'équation n'a aucune solution, donc -2 n'a aucun antécédent par f

• Pour calculer le ou les antécédents de 0, il suffit de résoudre l'équation : $f(x)$ = 0

C'est à dire :

x^2 **= 0 .** **qui a pour solution :**

x **= 0**

L' antécédent de 0 par f est 0

Exercice 2 : Déterminer, le ou les antécédents de 2 et -2 par la fonction $f(x)$ = 5x + 3

Réponse :

• Pour calculer le ou les antécédents de 2, il suffit de résoudre l'équation : $f(x)$ = 2

C'est à dire :

5x + 3 = 2

5x = 2 – 3

5x = -1

$x = -\frac{1}{5}$

L'antécédent de 2 par f est $-\frac{1}{5}$

• Pour calculer le ou les antécédents de -2, il suffit de résoudre l'équation : $f(x)$ = -2

C'est à dire :

5x + 3 = -2

5x = -2 – 3

5x = -5

$x = -\frac{5}{5}$ **= -1**

L'antécédent de -2 par f est -1

Exercice 3 : Déterminer, le ou les antécédents de 2 et $\frac{2}{3}$ par la fonction $f(x)$ = $\frac{2x+1}{3x-2}$ $x \neq \frac{2}{3}$.

Réponse :

• Pour calculer le ou les antécédents de 2, il suffit de résoudre l'équation: $f(x)$ = 2

C'est à dire :

$\frac{2x+1}{3x-2}$ **= 2**

il suffit de résoudre :

$\frac{2x+1}{3x-2} = \frac{2(3x-2)}{3x-2}$

Pour $x \neq \frac{2}{3}$**, cela revient à résoudre :**

$2x + 1 = 2(3x - 2)$

$2x + 1 = 6x - 4$

nous obtenons donc :

$2x - 6x = -4 - 1$

C'est-à-dire :

$-4x$ **= -5** $x = \frac{5}{4}$

L'antécédent de 2 par f est $-\frac{5}{4}$

• Pour calculer le ou les antécédents de $\frac{2}{3}$, il suffit de résoudre l'équation:

$f(x) = \frac{2}{3}$.

C'est à dire :

$\frac{2x+1}{3x-2} = \frac{2}{3}$

il suffit de résoudre :

$\frac{2x+1}{3x-2} = \frac{\frac{2}{3}(3x-2)}{3x-2}$

Pour $x \neq \frac{2}{3}$, cela revient à résoudre :

$2x+1 = \frac{2}{3}(3x-2)$

$2x+1 = 2x - \frac{4}{3}$,

nous obtenons donc :

$2x - 2x = -\frac{4}{3} - 1$

C'est-à-dire :

$0 = -\frac{7}{3}$

Ce qui est impossible.

donc $\frac{2}{3}$ n'a aucun antécédent par f.

b) Par le calcul après avoir transformé l'expression

Exercice 1 : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$: $f(x) = x^2 + 16x + 39$

a) Démontrer que $f(x) = (x+8)^2 - 25$

b) Démontrer que $f(x) = (x+3)(x+13)$

c) Déterminer les antécédents par f de 0

d) Déterminer les antécédents par f de -16

e) Déterminer les antécédents par f de 39

f) Déterminer les antécédents par f de -34

Réponse :

a) $(x+8)^2 - 25 = x^2 + 16x + 64 - 25 = x^2 + 16x + 39 = f(x)$

b) $(x+3)(x+13) = x^2 + 13x + 3x + 39 = x^2 + 16x + 39 = f(x)$

Remarque essentielle: La fonction $f(x)$ peut donc s'écrire sous trois formes différentes :

$f(x) = x^2 + 16x + 39$ (1)

$f(x) = (x+8)^2 - 25$ (2)

$f(x) = (x+3)(x+13)$ (3)

Pour chaque exercice, on est amené à choisir la « bonne forme », permettant la résolution aisée de l'exercice.

c) Pour déterminer le ou les antécédents de 0, on doit résoudre l'équation $f(x) = 0$. La forme la plus adaptée est la forme (3) car nous sommes amenés à résoudre l'équation produit nul : $(x+3)(x+13) = 0$

$(x+3)(x+13) = 0$

$x+3 = 0$ **ou** $x+13 = 0$

$x = -3$ **ou** $x = -13$

Les antécédents de 0 par f sont donc -13 et -3.

d) Pour déterminer le ou les antécédents de -16, on doit résoudre l'équation $f(x)$ = -16. La forme la plus adaptée est la forme (2) car nous avons à résoudre l'équation: $(x+8)^2-25=-16$

C'est-à-dire :

$(x+8)^2=-16+25$

$(x+8)^2=9$ **On obtient donc :**

$x+8=\sqrt{9}$ **ou** $x+8=-\sqrt{9}$

$x+8=3$ **ou** $x+8=-3$

$x=3-8=-5$ **ou** $x=-3-8=-11$

$x=-5$ **ou** $x=-11$

Les antécédents de -16 par f sont donc -11 et -5.

e) Pour déterminer le ou les antécédents de 39, on doit résoudre l'équation $f(x)$ = 39. La forme la plus adaptée est la forme (1) car nous avons déjà 39 dans cette expression :

$x^2+16x+39=39$.

Ce qui revient à résoudre :

$x^2+16x=39-39$

C'est-à-dire :

$x^2+16x=0$

Factorisons par x cette expression : $x(x+16)$ = 0

$x=0$ **ou** $x+16=0$

$x=0$ **ou** $x=-16$

Les antécédents de 39 par f sont donc 0 et -16.

f) Pour déterminer le ou les antécédents de -34, on doit résoudre l'équation $f(x)$ = -34. La forme la plus adaptée est la forme (2) car nous avons à résoudre l'équation:

$(x+8)^2-25=-34$

$(x+8)^2=-34+25$

On obtient donc :

$(x+8)^2=-9$

qui n'a aucune solution puisque le carré $(x+8)^2$ ne peut être négatif.

-34 n'a pas d'antécédent par la fonction f.

Remarque : La forme canonique (forme 2) permet de déterminer, n'importe quel antécédent par la fonction f. Cet exemple, nous permet de voir comment choisir la « bonne forme », permettant la résolution plus aisée de l'exercice.