Classe : TES1 Le 28/11/2003

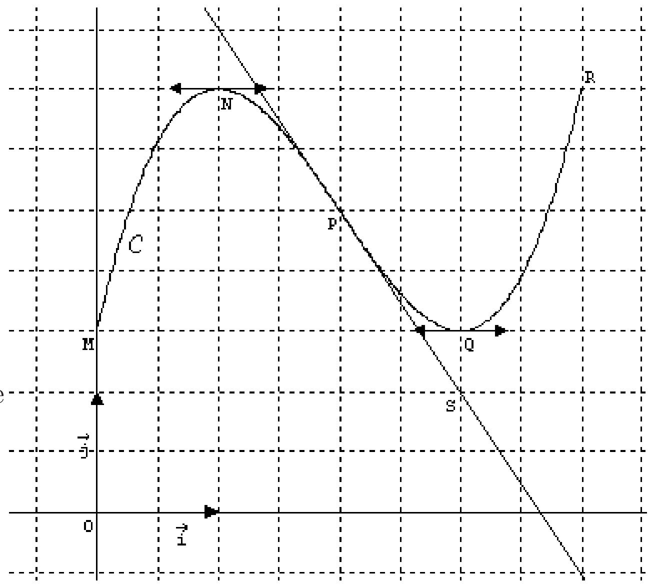
MATHEMATIQUES

Devoir N° 2

Calculatrice autorisée Durée : 3 heures

Exercice 1: (4,5 *points*)

Soit f la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0;4]$ dont la représentation graphique, dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$, est la courbe $\mathcal{C}$ ci-contre.
Les points M, N, P, Q et R appartiennent à $\mathcal{C}$.
Les coordonnées de M sont $\left(0;\dfrac{3}{2}\right)$, celles de N sont $\left(1;\dfrac{7}{2}\right)$, celles de P sont $\left(2;\dfrac{5}{2}\right)$, celles de Q sont $\left(3;\dfrac{3}{2}\right)$ et celles de R sont $\left(4;\dfrac{7}{2}\right)$.
La courbe $\mathcal{C}$ admet en chacun des points N et Q une tangente parallèle à l'axe des abscisses.
La droite Δ est tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point P ; elle passe par le point S de cooordonées $(3;1)$.



1. (a) Donner $f'(1)$, $f'(2)$ et $f'(3)$.
   (b) Déterminer une équation de la droite Δ.
2. Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 3$ sur l'intervalle $[0;4]$.
3. f est la dérivée d'une fonction F définie sur l'intervalle $[0;4]$.
   (a) Que représente la fonction F par rapport à la fonction f.
   (b) En justifiant la réponse, donner alors le sens de variation de F.
4. (a) Pour tout $x \in [0;4]$, $f'(x) = ax^2 + bx + c$, où a, b et c sont des constantes réelles.
   Déterminer a, b et c à l'aide des résultats de la question **1. (a)**
   (b) On admet que pour tout $x \in [0;4]$, $f'(x) = \dfrac{3}{2}x^2 - 6x + \dfrac{9}{2}$.
   Déterminer alors l'expression de $f(x)$ pour $x \in [0;4]$.

Exercice 2: (5,5 *points*)

1. Déterminer la dérivée des fonctions suivantes :
   (a) la fonction f, définie sur $[1;+\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{2x^3 + x - 1}$.
   (b) la fonction g définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{1}{3}\right\}$ par : $g(x) = \dfrac{1}{(3x+1)^3}$.
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^2(x^3+2)^4$.
   Déterminer les primitives F de f sur $\mathbb{R}$.
3. (a) g est la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par : $g(x) = \dfrac{2x^2+1}{x-1}$.
   Déterminer la dérivée de la fonction g.
   (b) En déduire la primitive de la fonction h définie sur $]1;+\infty[$ par :
   $h(x) = \dfrac{2x^2 - 4x - 1}{(x-1)^2}$ qui s'annule pour $x = 2$.
4. Une entreprise fabrique un certain objet en quantité x ($x \in [0;80]$).
   On a constaté que le coût marginal en euros pour produire un objet de plus est égal à :
   $C_m(x) = 0,06x^2 - 4,2x + 74$ pour $0 \leq x \leq 80$.
   Les frais fixes de l'entreprise s'élèvent à 200 € pour cette production.
   On admet que la fonction coût total C_T est une primitive de la fonction coût marginal C_m sur l'intervalle $[0;80]$.
   Déterminer l'expression de $C_T(x)$ en fonction de x sur l'intervalle $[0;80]$.

Exercice 3: (10 *points*)

PARTIE A

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 5$.

1. Déterminer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Etudier les variations de la fonction g. Dresser son tableau de variation.
3. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $\mathbb{R}$ une unique solution α contenue dans l'intervalle $[0; 1]$.
   Donner un encadrement de α à 10^{-2} près.
4. En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

PARTIE B

Soit f la fonction définie sur $]-1; +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x + 1}{(x+1)^2}$.

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ (unité graphique : 2 cm).

1. (a) Déterminer la limite de f en -1.
   Interpréter graphiquement le résultat.
   (b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
2. (a) Calculer la dérivée de f sur $]-1; +\infty[$.
   Montrer que pour tout x appartenant à $]-1; +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(x+1)^3}$.
   (b) Etablir le tableau de variation de la fonction f.
3. (a) Montrer que la droite Δ d'équation $y = x - 2$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.
   (b) Préciser la position de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite Δ.
4. Déterminer l'équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 0.
5. Tracer la courbe $\mathcal{C}$, ses asymptotes et la droite T dans le repère $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

Exercice 1:

1. (a) $f'(1) = 0$ et $f'(3) = 0$ car les tangentes à $\mathcal{C}$ aux points d'abscisses 1 et 3 sont horizontales

   $f'(2) = -\dfrac{3}{2}$, c'est le coefficient directeur de la droite Δ.

   (b) Une équation de Δ est de la forme $y = -\dfrac{3}{2}x + b$

   or Δ passe par $S(3;1)$ d'où $1 = -\dfrac{3}{2} \times 3 + b$ et $b = 1 + \dfrac{9}{2} = \dfrac{11}{2}$

   Donc une équation de Δ est $y = -\dfrac{3}{2}x + \dfrac{11}{2}$.

2. Graphiquement, l'équation $f(x) = 3$ admet 3 solutions.

3. f est la dérivée d'une fonction F définie sur $[0;4]$.

   (a) F est alors une primitive de f sur $[0;4]$.

   (b) Pour tout $x \in [0;4]$, $f(x) > 0$, on a alors $F'(x) > 0$ sur $[0;4]$, donc F est strictement croissante sur $[0;4]$.

4. (a) pour $x \in [0;4]$, $f'(x) = ax^2 + bx + c$

   d'après la question 1. (a), on a $f'(1) = 0$, $f'(3) = 0$ et $f'(2) = -\dfrac{3}{2}$, d'où

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ 4a+2b+c=-\dfrac{3}{2} \\ 9a+3b+c=0 \end{cases} \quad \text{équivaut à} \quad \begin{cases} a+b+c=0 \\ 3a+b=-\dfrac{3}{2} \\ 8a+2b=0 \end{cases} \quad \text{équivaut à} \quad \begin{cases} a+b+c=0 \\ 3a+b=-\dfrac{3}{2} \\ 2a=3 \end{cases}$$

   On obtient $a = \dfrac{3}{2}$, et $3a + b = -\dfrac{3}{2}$, d'où $b = -6$

   et $\dfrac{3}{2} - 6 + c = 0$, ce qui donne $c = 6 - \dfrac{3}{2} = \dfrac{9}{2}$ donc $f'(x) = \dfrac{3}{2}x^2 - 6x + \dfrac{9}{2}$

   (b) f est une primitive de f' qui vaut $\dfrac{3}{2}$ pour $x = 0$

   alors $f(x) = \dfrac{3}{2} \times \dfrac{x^3}{3} - 6\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{9}{2}x + k = \dfrac{1}{2}x^2 - 3x^2 + \dfrac{9}{2}x + k$ où $k \in \mathbb{R}$

   De plus $f(0) = \dfrac{3}{2}$ et $f(0) = \dfrac{1}{2} \times 0^3 - 3 \times 0^2 + \dfrac{9}{2} \times 0 + k = k$

   donc $k = \dfrac{3}{2}$ et $f(x) = \dfrac{1}{2}x^3 - 3x^2 + \dfrac{9}{2}x + \dfrac{3}{2}$.

Exercice 2:

1. (a) f est définie sur $[1;+\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{2x^3 + x - 1}$

   $f(x) = \sqrt{u(x)}$ où $u(x) = 2x^3 + x - 1$; $u'(x) = 6x^2 + 1$

   $f' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ d'où $f'(x) = \dfrac{6x^2+1}{2\sqrt{2x^3+x-1}}$

   (b) g est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{1}{3}\right\}$ par : $g(x) = \dfrac{1}{(3x+1)^3}$

   $g(x) = \dfrac{1}{u(x)^3} = (u(x))^{-3}$ où $u(x) = 3x + 1$; $u'(x) = 3$

   $g'(x) = -3u'(x) \times (u(x))^{-3-1} = -3 \times 3 \times (3x-1)^{-4} = \dfrac{-9}{(3x+1)^4}$.

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2(x^3+2)^4$

   On pose $u(x) = x^3 + 2$; $u'(x) = 3x^2$ on a alors $f(x) = \dfrac{2}{3} \times u'(x) \times (u(x))^4$

   Les primitives F de f sur $\mathbb{R}$ sont alors de la forme : $F(x) = \dfrac{2}{3}\dfrac{(u(x))^5}{5} + k = \dfrac{2}{15}(x^3+2)^5 + k$ où $k \in \mathbb{R}$

3. (a) g est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par : $g(x) = \dfrac{2x^2+1}{x-1}$

   $g(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ $u(x) = 2x^2 + 1$; $u'(x) = 4x$ et $v(x) = x - 1$; $v'(x) = 1$

$g' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

$g'(x) = \dfrac{4x(x-1) - (2x^2+1) \times 1}{(x-1)^2} = \dfrac{4x^2 - 4x - 2x^2 - 1}{(x-1)^2} = \dfrac{2x^2 - 4x - 1}{(x-1)^2}$.

(b) On a alors $h(x) = g'(x)$ pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Les primitives de h sur $]1; +\infty[$ sont alors de la forme : $H(x) = g(x) + k \quad$ où $k \in \mathbb{R}$

$H(x) = \dfrac{2x^2+1}{x-1} + k \quad$ où $k \in \mathbb{R}$

On veut de plus $H(2) = 0$ et $H(2) = \dfrac{2 \times 2^2 + 1}{2-1} + k = 9 + k \quad$ d'où $\quad 9 + k = 0$ et $k = -9$

Donc $H(x) = \dfrac{2x^2+1}{x-1} - 9$.

4. C_T est une primitive de C_m sur $[0; 80]$

On a alors $C_T(x) = 0,06\dfrac{x^3}{3} - 4,2\dfrac{x^2}{2} + 74x + k = 0,02x^3 - 2,1x^2 + 74x + k \quad$ où $k \in \mathbb{R}$

De plus les coûts fixes sont de 200€, d'où $C_T(0) = 200$

et $C_T(0) = 0,02 \times 0^3 - 2,1 \times 0^2 + 74 \times 0 + k = k \quad$ d'où $\quad k = 200$

et on obtient $C_T(x) = 0,02x^3 - 2,1x^2 + 74x + 200$.

Exercice 3:

PARTIE A

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 5$

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty \quad$ car g est une fonction polynôme

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$

2. g est dérivable sur $\mathbb{R}$

$g'(x) = 3x^2 + 6x + 3 = 3(x+1)^2$

donc $g'(x) > 0$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\} \quad$ et $\quad g'(x) = 0$ pour $x = -1$

donc g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Tableau de variation de g :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$+$	
g	$-\infty$		$\nearrow$		$+\infty$

3. g est continue sur $\mathbb{R}$

g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} = -\infty \quad$ et $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

donc l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$

de plus $g(0) = -5$ et $g(1) = 2$ donc $\alpha \in [0; 1]$

or $g(0,81) \simeq -0,07$ et $g(0,82) \simeq 0,03$ donc $0,81 < \alpha < 0,82$

4. On obtient alors $g(x) < 0$ sur $]-\infty; \alpha[\;$; $\quad g(x) > 0$ sur $]\alpha; +\infty[\quad$ et $\quad g(x) = 0$ pour $x = \alpha$.

PARTIE B

f est la fonction définie sur $]-1; +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x + 1}{(x+1)^2}$.

1. (a) $\lim\limits_{x \to -1} x^3 - 3x + 1 = (-1)^3 - 3 \times (-1) + 1 = -1 + 3 + 1 = 3$

et $\lim\limits_{x \to -1} (x+1)^2 = 0^+ \quad$ donc $\quad \lim\limits_{x \to -1} f(x) = +\infty$ et la droite d'équation $x = -1$ est asymptote à $\mathcal{C}$.

(b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ (f est une fonction rationnelle)

2. (a) $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)} \qquad$ où $\quad u(x) = x^3 - 3x + 1$; $\quad u'(x) = 3x^2 - 3 \quad$ et $\quad v(x) = (x+1)^2$; $\quad v'(x) = 2(x+1)$

$$f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$
$$f'(x) = \frac{(3x^2-3)(x+1)^2 - (x^3-3x+1)\times 2(x+1)}{((x+1)^2)^2} = \frac{(x+1)((3x^2-3)(x+1) - 2(x^3-3x+1))}{(x+1)^4}$$
$$f'(x) = \frac{3x^3+3x^2-3x-3-2x^3+6x-2}{(x+1)^3} = \frac{x^3+3x^2+3x-5}{(x+1)^3} = \frac{g(x)}{(x+1)^3}$$

(b) sur $]-1;+\infty[$, $(x+1)^3>0$, donc $f'(x)$ est du signe de $g(x)$

Tableau de variation de f :

x	-1		α		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
f	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

3. (a) $f(x)-(x-2) = \dfrac{x^3-3x+1}{(x+1)^2} - \dfrac{(x-2)(x+1)^2}{(x+1)^2} = \dfrac{x^3-3x+1-(x-2)(x^2+2x+1)}{(x+1)^2}$
$$= \frac{x^3-3x+1-(x^3+2x^2+x-2x^2-4x-2)}{(x+1)^2} = \frac{x^3-3x+1-x^3+3x+2}{(x+1)^2} = \frac{3}{(x+1)^2}$$

or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{(x+1)^2} = 0$ donc la droite Δ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.

(b) $f(x)-(x-2) = \dfrac{3}{(x+1)^2}$

or pour $x\in]-1;+\infty[$, $\dfrac{3}{(x+1)^2}>0$, c'est à dire $f(x)-(x-2)>0$

donc $\mathcal{C}$ est au-dessus de Δ sur $]-1;+\infty[$.

4. Une équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 est :

$y = f'(0)(x-0)+f(0)$ $\qquad f'(0) = \dfrac{g(0)}{(0+1)^3} = 0^3+3\times 0^2+3\times 0-5 = -5$

$$f(0) = \frac{0^3-3\times 0+1}{(0+1)^2} = 1$$

donc $y=-5x+1$.