II – Les Intégrales

1) Définition de l'intégrale

Définition :

Soit f une fonction <u>continue</u> sur un intervalle $[a\ ;\ b]$, F une primitives de f sur $[a\ ;\ b]$.

On appelle **intégrale de f entre a et b** le nombre réel : $\int_a^b f(x).\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$

Remarque : $\int_a^b f(x).\mathrm{d}x$ se lit aussi : « somme de a à b de $f(x)$ dx » ou « intégrale de a à b de $f(x)$ dx ».

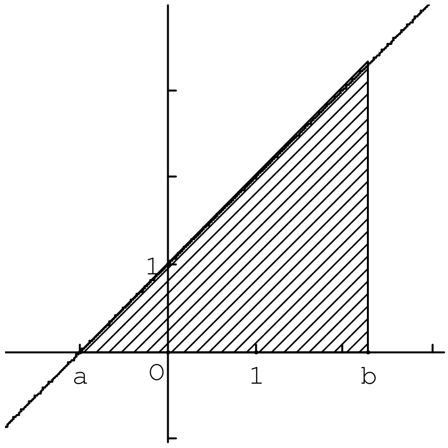
2) Interprétation géométrique de l'intégrale

Propriété 1 : *(Positivité)*

Si f est continue et **positive** sur $[a\ ;\ b]$, alors $\int_a^b f(x).\mathrm{d}x \geqslant 0$

Dans ce cas, $\int_a^b f(x).\mathrm{d}x$ correspond à **l'aire du plan** délimitée par :

- La **courbe** $\mathscr{C}_f$ d'équation $y = f(x)$
- L'**axe des abscisses** d'équation $y = 0$
- La **droite** verticale (d_1) d'équation $x = a$
- La **droite** verticale (d_2) d'équation $x = b$



Exemples :

1) Soit la fonction f définie sur $[-1\ ;2{,}2]$ par : $f(x) = x+1$

L'aire de la partie hachurée est : $\mathscr{A} = \dfrac{base \times hauteur}{2}$

Donc $\mathscr{A} = \dfrac{3{,}2\times3{,}2}{2} = \mathbf{5{,}12\ u.a.}$

D'autre part, $\mathscr{A} = \int_{-1}^{2{,}2}(x+1).\mathrm{d}x = F(2{,}2) - F(-1) = \mathbf{5{,}12\ u.a.}$

Où F est une primitive de f définie par $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + x$

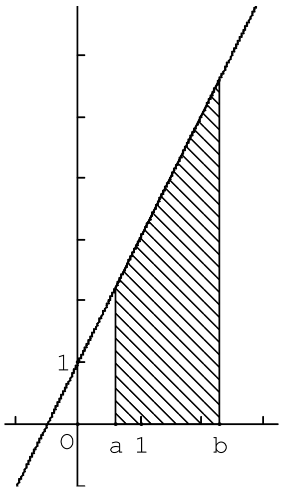
2) Soit la fonction g définie sur $\left[\frac{1}{2}\ ;\ \frac{9}{4}\right]$ par : $g(x) = 2x+1$

L'aire de la partie hachurée est : $\mathscr{A} = \dfrac{base1 + base2}{2} \times hauteur$

Donc $\mathscr{A} = \dfrac{2+\frac{11}{2}}{2} \times \dfrac{7}{4} = \mathbf{\dfrac{105}{16}}$ **u.a.**

D'autre part, $\mathscr{A} = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{9}{4}}(2x+1).\mathrm{d}x = G\left(\frac{9}{4}\right) - G\left(\frac{1}{2}\right) = \mathbf{\dfrac{105}{16}}$ **u.a.**

Où G est une primitive de g définie par $G(x) = x^2 + x$



3) Propriétés de l'intégrale

Propriété 2 : *(Linéarité)*

Si f est continues et sur $[a\ ;\ b]$, et soit k un réel quelconque, alors : $\int_a^b (k\times f(x)).\mathrm{d}x = k\times\int_a^b f(x).\mathrm{d}x$

Exemple d'application :

$\int_{-2}^{3}(4x^2-20x).\mathrm{d}x = 4\times\int_{-2}^{3}(x^2-5x).\mathrm{d}x = 4\times(F(3)-F(-2)) = 4\times\left(\left(-\frac{27}{2}\right)-\left(-\frac{38}{3}\right)\right) = -\mathbf{\frac{10}{3}}$

Où F est une primitive de la fonction $x \mapsto x^2 - 5x$, définie par : $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2$

Propriété 3 : *(Inégalité)*

Si f et g sont continues et sur $[a\ ;\ b]$, et si $f(x) \leqslant g(x)$ alors $\int_a^b f(x).\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x).\mathrm{d}x$

Exemple d'application :

La courbe représentative de la fonction $x \mapsto \ln x$ est en dessous de tangente au point d'abscisse 1 d'équation $y = x - 1$; cela signifie que : pour tout $x \in]0\ ;+\infty[$, $\ln x \leq x - 1$

on a alors : $\int_1^2 \ln(x).\mathrm{d}x \leqslant \int_1^2 (x-1).\mathrm{d}x$

une primitive de la fonction $x \mapsto x - 1$ est $F(x) = \frac{x^2}{2} - x$

d'où $\int_1^2 (x-1).\mathrm{d}x = F(2) - F(1) = \frac{2^2}{2} - 2 - \left(\frac{1^2}{2} - 1\right) = 2 - 2 - \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$ **u.a.** On obtient donc : $\int_1^2 \ln(x).\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2}$

Propriété 4 : *(Relation de Chasles)*

Si f est continue sur $[a\ ;\ b]$, soit $c \in [a\ ;\ b]$, alors $\int_a^c f(x).\mathrm{d}x + \int_c^b f(x).\mathrm{d}x = \int_a^b f(x).\mathrm{d}x$

Exemple d'application :

Soit f la fonction définie sur $[-1\ ;\ 5]$ par $f(x) = x^2 - 5x + 4$

On cherche à calcluer l'aire de la partie du plan délimitée par :

- La courbe $\mathscr{C}_f$
- L'axe des ordonnnées
- La droite d'équation $x = -1$
- La droite d'équation $x = 5$

Sur $[-1\ ;\ 1]$, $f(x) \geqslant 0$; sur $[1\ ;\ 4]$, $f(x) \leqslant 0$; sur $[4\ ;\ 5]$, $f(x) \geqslant 0$

$$\text{Donc } \mathscr{A} = \int_{-1}^1 f(x).\mathrm{d}x + \int_1^4 -f(x).\mathrm{d}x + \int_4^5 f(x).\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 f(x).\mathrm{d}x - \int_1^4 f(x).\mathrm{d}x + \int_4^5 f(x).\mathrm{d}x$$
$$= (F(1) - F(-1)) - (F(4) - F(1)) + (F(5) - F(4)) = \left(\frac{26}{3}\right) - \left(-\frac{9}{2}\right) + \left(\frac{11}{6}\right) = \mathbf{15\ u.a.}$$

Propriété 5 : *(Valeur moyenne d'une fonction)*

Si f est continue sur $[a\ ;\ b]$, alors **la valeur moyenne m** de f sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$ est le nombre réel : $m = \frac{1}{b-a} \times \int_a^b f(x).\mathrm{d}x$

Exemple d'application :

- Le débit en $\mathrm{m}^3 \times \mathrm{h}^{-1}$ d'une pompe à arrosage qui fonctionne en été de 6 heures à 20 heures, est modélisé par $f(x) = 5\mathrm{e}^{0,002x}$ où x est l'heure considérée ($6 \leq x \leq 20$).

Le volume d'eau débité par cette pompe entre 6 et 20 heures est égal à :

$\int_6^{20} f(x)dx = \mathrm{F}(20) - \mathrm{F}(6)$ où F est une primitive de f ; $\mathrm{F}(x) = 5 \times \frac{1}{0,002}\mathrm{e}^{0,002x} = 2500\ \mathrm{e}^{0,002x}$,

soit environ 71,85 m^3.

Le **débit moyen** de cette pompe entre 6 et 20 heures est égal à :

$\frac{1}{20-6}\int_6^{20} f(x)dx$ soit environ 5,13 $\mathrm{m}^3 \times \mathrm{h}^{-1}$.

Ce nombre est la valeur moyenne de la fonction f ; il est donc exprimé avec la même unité : $\mathrm{m}^3 \times \mathrm{h}^{-1}$.

- Dans une région où une épidémie commence à se propager, on constate que le nombre de malades contaminés, t jours après le début de l'épidémie est $\mathrm{M}(t)$.

Le nombre total de malades sur une période de trente jours est $\int_0^{30} M(t)dt$;

le **nombre moyen** de personnes contaminées par jour est $\frac{1}{30}\int_0^{30} M(t)dt$.