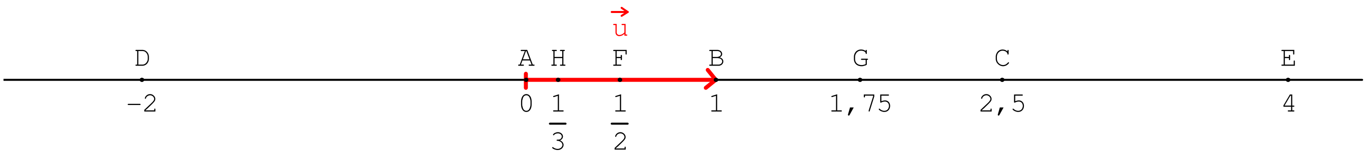
# Chapitre 3 : Les Vecteurs

## I) Repérage dans le plan

### 1) Repérage sur une droite

O et I sont deux points distincts et quelconques sur une droite (d).
Au collège, vous avez vu que l'on pouvait considérer (O,I) comme un repère de la droite.
Au lycée, on appelle $\vec{u}$ le vecteur $\overrightarrow{OI}$. On parlera alors du repère (O; $\vec{u}$ ) de la droite (d)

**Déf :** L'abscisse de M dans le repère (O; $\vec{u}$ ) c'est le réel $x$ tel que $\overrightarrow{OM} = x.\vec{u}$.




$\overrightarrow{AD} = -2\,\vec{u}$ ; $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{3}\vec{u}$ ; $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\vec{u}$ ; $\overrightarrow{AG} = 1{,}75\,\vec{u}$ ; $\overrightarrow{AC} = 2{,}5\,\vec{u}$ ; $\overrightarrow{AE} = 4\,\vec{u}$ .

### 2) Repères et coordonnées

O, I et J sont trois points distincts et non alignés du plan.
Au collège vous avez vu que (O, I, J) constitue un repère du plan.
Au lycée, on appelle $\vec{i}$ le vecteur $\overrightarrow{OI}$ et $\vec{j}$ le vecteur $\overrightarrow{OJ}$. On parlera du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

rque : Comme nous utilisons du papier avec un quadrillage rectangulaire nous travaillerons la plupart du temps avec un repère orthogonal.

**Prop 1 :** M a pour coordonnées ($x$; $y$ ) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x.\vec{i} + y.\vec{j}$ .

**Prop 2 :** Le point M et le vecteur $\overrightarrow{OM}$ ont les mêmes coordonnées.

**Prop 3 :** Si A a pour coordonnées ( $x_A$; $y_A$ ) et si B a pour coordonnées ( $x_B$; $y_B$ ) alors

① le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées ( $x_B - x_A$ ; $y_B - y_A$ )

② le milieu de [AB] a pour coordonnées ( $\frac{x_A+x_B}{2}$ ; $\frac{y_A+y_B}{2}$ )

Si le repère est orthonormé alors

③ La longueur AB ( ou la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$ ) est égale à :

$$\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

## II) Opérations sur les vecteurs

### 1) égalité de vecteurs

**Prop 1:** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow$ ABDC est un parallélogramme.

**Prop 2 :** Un quadrilatère est un parallélogramme si et seulement si ses côtés opposés sont parallèles deux à deux.

**Prop 3 :** Un quadrilatère est un parallélogramme si et seulement si ses diagonales ont le même milieu.

**Prop 4 :** Un quadrilatère est un parallélogramme si et seulement si il est non croisé et il a deux côtés opposés parallèles et de même longueur.

**Prop 5 :** Un quadrilatère est un parallélogramme si et seulement si il est non croisé et il a ses côtés opposés de même longueur.

## 2) Somme de vecteurs

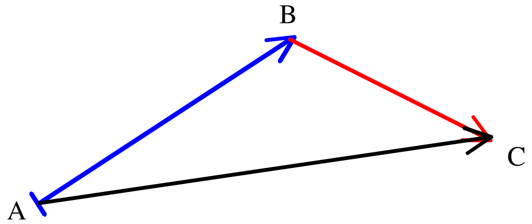
Il n'y a que deux situations pour lesquelles nous pouvons conclure facilement :

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ C'est la relation de Chasles

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ où D est tel que ABDC est un parallélogramme règle du parallélogramme).

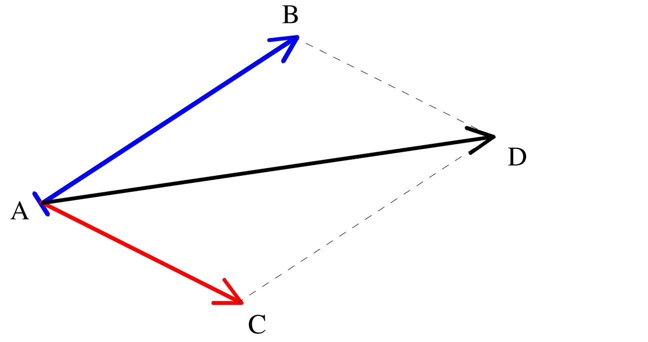
**Relation de chasles**

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$




**Règle du parallèlogramme**

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ tel que ABDC soit un parallèlogramme




## 3) Multiplication d'un vecteur par un réel, colinéarité

### a) exemples

***Activité 7 :*** Construction

Soit A et B deux points du plan ( on prendra AB = 2 cm )

**1.** Placer C, D, E, F, G, H, I, J définis par :

$\overrightarrow{BC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{DA} = 2\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{EB} = -3\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{GB} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BA}$ ; $\overrightarrow{HA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{HB}$ .

**2.** Placer M, N et P tels que $\overrightarrow{AM} = \sqrt{2}\,\overrightarrow{AB}$ ; $\overrightarrow{AN} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{AB}$ ; $\overrightarrow{AP} = \pi\,\overrightarrow{AB}$.

**Prop :** Pour bien placer un point M par rapport aux points A et B il faut que le point M n'apparaisse qu'une seule fois dans l'égalité, et si possible en extrémité du vecteur :

$$\overrightarrow{\mathbf{AM}} = k^*\overrightarrow{\mathbf{AB}} \text{ ou } \overrightarrow{\mathbf{AM}} = k^*\vec{u}$$

### b) Définitions

**Def 1 :** $\vec{u}$ est un vecteur non nul, $k$ est un réel non nul.

Le vecteur $\vec{v} = k^*\vec{u} = k.\vec{u}$ est défini de la manière suivante :

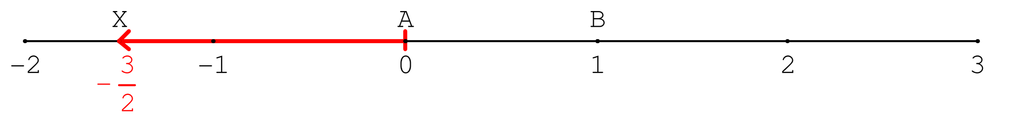
Si $\overrightarrow{AB}$ est un représentant de $\vec{u}$

alors $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ où C est le point de la droite (AB) dont l'abscisse est $k$ dans le repère (A,B).

$\vec{v} = \overrightarrow{AV} = \frac{5}{2}\vec{u}$


$\vec{w} = \overrightarrow{AW} = \pi\vec{u}$


$\vec{x} = \overrightarrow{AX} = -\frac{3}{2}\vec{u}$



**Prop 1 :** $\vec{u}$ est un vecteur non nul, $k$ est un réel non nul. Le vecteur $k.\vec{u}$ est le vecteur :

- de même direction que $\vec{u}$.
- de même sens que $\vec{u}$ si $k > 0$ et de sens contraire si $k < 0$.
- de longueur égale à $|k|$ fois celle de $\vec{u}$.

**Prop 2 :** Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $k = 0$ alors $k.\vec{u} = \vec{0}$

### c) Colinéarité

**Déf :** Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls sont colinéaires si et seulement si ils ont la même direction.

**Prop 3 :** Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls sont colinéaires si et seulement si $\vec{v} = k.\vec{u}$

**Prop 4 :** Si $\vec{u}$ a pour coordonnées $(x; y)$ alors $k.\vec{u}$ a pour coordonnées $(k.x; k.y)$.
Si $\vec{v}$ a pour coordonnées $(x'; y')$ alors $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $(x + x'; y + y')$.

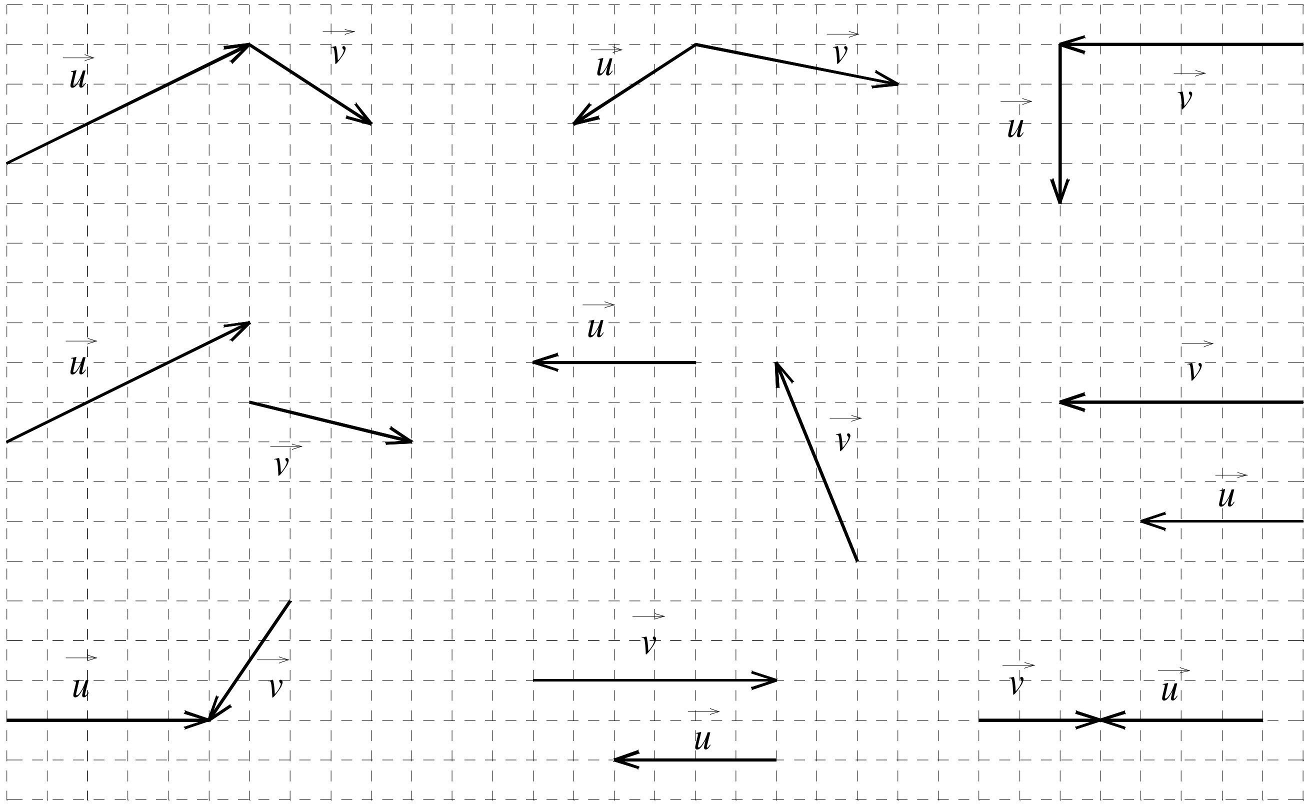
## Méthodes

**Méth 1 :** (colinéarité ) Si $\vec{u}$ a pour coordonnées $(x; y)$ et s i $\vec{v}$ a pour coordonnées $(x'; y')$ alors
**$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $x.y' - y.x' = 0$.**

**Méth 2 :** Trois points distincts A, B et C sont **alignés**
si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

**Méth 3 :** Deux droites (AB) et (CD) sont **parallèles**
si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

**Somme de vecteurs**



**Somme de vecteurs**