Chapitre 1 . Polynômes du second degré

I) Les Fonctions Polynômes

Définition : On appelle **fonction polynôme f** (**polynôme** pour simplifier) toute fonction définie sur ℝ, qui peut s'écrire sous la forme :

$f(x) = a_n .x^n + a_{n-1}.x^{n-1} + \ldots + a_1.x + a_0$ (où n est un entier naturel et a_0 , a_1 , … , a_n sont n + 1 réels)

Rem :

- Le polynôme de la définition est ordonné suivant les puissances décroissantes de x .
- Un polynôme est toujours défini sur ℝ ; il n'est donc pas nécessaire de le répéter systématiquement .
- La fonction, définie sur ℝ, par $x \longmapsto 0$ est **la fonction polynôme nulle** .
- Les **fonctions constantes** ($x \longmapsto k$) , Les **fonction affines** ($x \longmapsto ax + b$) , les **fonctions puissances** ($x \longmapsto x^n$) sont des polynômes .

Ex :

- La fonction P, définie, sur ℝ par $P(x) = (x – 1)(x – 2)(x – 3)$ est un polynôme. En effet, après développement, on a pour tout réel x, $P(x) = x^3 – 6x^2 + 11x – 6$
- La fonction Q , définie sur ℝ , par $Q(x) = \dfrac{(x^2 + 1) (2x - 1)}{x^2 + 1}$ est un polynôme.

  En effet, après simplification, on a pour tout réel x, $G(x) = 2x – 1$
- La fonction $h(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ n'est pas un polynôme car elle n'est pas définie sur ℝ .

Définition : Soit P un polynôme non nul . Alors il existe un **unique** entier naturel n tel que :

$$P(x) = a_n .x^n + a_{n-1}.x^{n-1} + \ldots + a_1.x + a_0$$

n est appelé le **degré** du polynôme P et on note $deg\,(P) = n$.
Les réels a_n , a_{n-1} , … , a_1 , a_0 sont appelés les **coefficients** du polynôme P .
Plus précisément , a_k (avec $0 \leq k \leq n$) est le coefficient de x^k (ou du terme de degré k)
a_n est le coefficient dominant et a_0 est le coefficient constant de P

Ex :

- Toute fonction constante **non nulle** est un polynôme de degré 0
- Toute fonction affine $x \longmapsto ax + b$ (avec $a \neq 0$) est un polynôme de degré 1
- Toute fonction $x \longmapsto ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$) est un **polynôme de degré 2** (ou **trinôme de degré** 2)
- Toute expression du type $a_n x^n$ (avec $a_n \neq 0$) est **un monôme** de degré n

Rem - Le polynôme nul n'a pas de degré.
- Certains coefficients d'un polynôme non nul peuvent être nuls.
  Par exemple pour $x \longmapsto x^4 + 3x^3 + x$, les coefficients des termes de degré 0 et 2 sont nuls.

Théorème : Deux polynômes non nuls sont égaux si, et seulement si, ils ont le **même degré** et si les **coefficients de leurs termes de même degré sont égaux**.

Ex : Pour tout réel x , $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = \dfrac{1}{2}x^4 + \sqrt{2}x^2 – 3x + 5 \Leftrightarrow a = \dfrac{1}{2}, b = 0 , c = \sqrt{2} , d = – 3$ et $e = 5$

II) Trinôme du second degré

1) Forme Canonique *(retenir la méthode)*

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) un trinôme du second degré .

Cette écriture s'appelle **forme canonique** du trinôme f

Comme $a \neq 0$, pour tout réel x : $ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right)$

Or $x^2 + \frac{b}{a}x$ est le début du développement de $\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = x^2 + 2 \times \frac{b}{2a}\ x + \left(\frac{b}{2a} \right)^2$

Donc , pour tout réel x , $ax^2 + bx + c = a\left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)$

Définition : le réel $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$ se note *(delta)* et s'appelle **le discriminant du trinôme** .

Théorème : * Le trinôme du second degré $f(x) = ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$) , peut aussi s'exprimer sous la forme $f(x) = a((x-\alpha)^2 + \beta)$. C'est la **forme canonique associée** à f.

* La courbe représentative de la fonction f, notée $\mathcal{C}_f$ s'obtient à partir de la parabole P d'équation $y = x^2$

- en effectuant une **translation** de vecteur $\vec{u} = \alpha\,\vec{i} + \beta\,\vec{j}$,
- puis une **dilatation** , c'est à dire une " une multiplication par a"

2) Variations et représentations graphiques

a > 0

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
f (x)	↘	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	↗

f admet **un minimum** en $-\frac{b}{2a}$

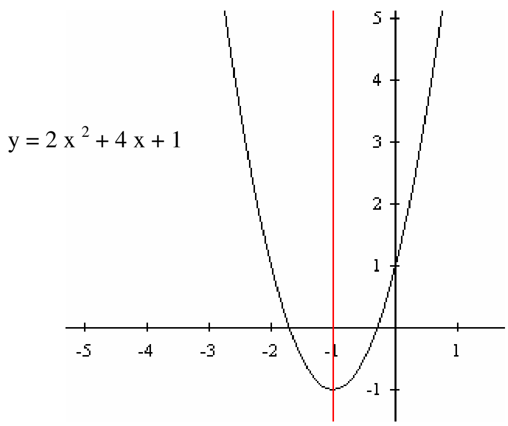
a < 0

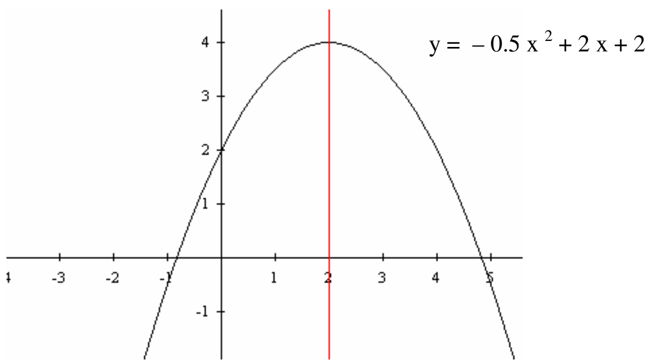
x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
f (x)	↗	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	↘

f admet **un maximum** en $-\frac{b}{2a}$

Propriétés :

- La représentation graphique dans un repère orthogonal est une **parabole** , dont le sommet est
- **$S\left(-\frac{b}{2a} ; f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$**
- La droite d'équation $x = -\frac{b}{2a}$ est un **axe de symétrie** de P .
- Si $a > 0$, les branches de la parabole sont tournées vers le haut.
- Si $a < 0$, les branches de la parabole sont tournées vers le bas.





III) Equations du 2^{nd} degré et Factorisations

1) Généralités

Définitions : Une **équation du second degré à une inconnue x** est une équation qui peut s'écrire sous la forme

$ax^2 + bx + c = 0$ (où a, b et c sont des réels et $a \neq 0$)
Les solutions de cette équation sont appelées **: les racines** du trinôme f

2) Résolution de $ax^2 + bx + c = 0$

$a \neq 0$, donc, pour tout réel x, $ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right) = 0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$

Trois cas se présentent :

Si $\Delta < 0$	$\frac{\Delta}{4a^2} < 0$ et l'équation n'a donc $\boxed{\text{pas de solution dans } \mathbb{R}}$.
Si $\Delta = 0$	$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x+\frac{b}{2a} = 0$ L'équation a donc pour $\boxed{\text{unique solution dans } \mathbb{R} : x_0 = -\frac{b}{2a}}$
Si $\Delta > 0$	$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 \Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0$ L'équation a donc $\boxed{\text{2 solutions distinctes dans } \mathbb{R} : x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}}$

Ex : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ci-dessous :

$6x^2 - x - 1 = 0$	$x^2 - 3x + 4 = 0$	$2x^2 - 12x + 18 = 0$
$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 6 \times (-1) = 1 + 24 = 25$ $\Delta > 0$, donc l'équation $6x^2 - x - 1 = 0$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$: $x_1 = \frac{1-5}{12} = -\frac{1}{3}$ et $x_2 = \frac{1+5}{12} = \frac{1}{2}$ $S = \{ -\frac{1}{3} ; \frac{1}{2} \}$	$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 9 - 16 = -7$ $\Delta < 0$, donc l'équation $x^2 - 3x + 4 = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$. $S = \varnothing$	$\Delta = (-12)^2 - 4 \times 2 \times 18 = 144 - 144 = 0$ $\Delta = 0$, donc l'équation $2x^2 - 12x + 18 = 0$ admet une solution dans $\mathbb{R}$: $x_0 = -\frac{-12}{2 \times 2} = 3$ $S = \{ 3 \}$

Rem :

- Il n'est pas toujours utile de calculer le discriminant . (ex : $4x^2 - 9 = 0$, $5x^2 - 4x = 0$, …)
- **Lorsque a et c sont de signes contraires** $-4ac > 0$ donc $\Delta > 0$ et l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux solution distinctes
- Lorsque l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux racines x_1 et x_2 , alors : $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ et $x_1.x_2 = \frac{c}{a}$

Applications :

- Vérifier le calcul des solutions de l'équation $a x^2 + b x + c = 0$.
- Trouver une racine connaissant l'autre . (ex : 1 est une solution évidente de $2 x^2 - 5 x + 3 = 0$, donc l'autre racine est $\frac{c}{a} = \frac{3}{2}$)
- Déterminer le signe des racines sans en connaître les valeurs .

2) Factorisation de $ax^2 + bx + c$

On a vu que , pour tout réel x : $a x^2 + b x + c = a \left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right)$

Trois cas se présentent :

$\Delta < 0$	Le trinôme n'a pas de racine ; il est inutile d'espérer factoriser ce trinôme en produit de polynômes du premier degré .
$\Delta = 0$	$a x^2 + b x + c = a \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = a \left(x + \frac{b}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a}\right)$ ($-\frac{b}{2a}$ est appelée **racine double** du trinôme)
$\Delta > 0$	$a x^2 + b x + c = \mathbf{a} (x - x_1) (x - x_2)$ (où x_1 et x_2 sont les racines du trinôme)

3) Signe du trinôme $ax^2 + bx + c$

Etudions le signe de $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)

Théorème :

- Si $\mathbf{\Delta > 0}$

Soit x_1 et x_2 les racines du trinôme
(avec, par exemple $x_1 < x_2$)
On a donc : $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$x - x_1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - x_2$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x - x_1)(x - x_2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Pour résumer : " ***$ax^2 + bx + c$* est du signe de a sauf entre les racines** "

- Si $\mathbf{\Delta \leq 0}$, on utilise la forme canonique : $f(x) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right)$

  - Si $\mathbf{\Delta < 0}$, $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}$ est strictement positif et donc , pour tout réel x,
    ***$ax^2 + bx + c$* est du signe de *a* .**
  - Si $\mathbf{\Delta = 0}$, $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ et donc , pour tout réel $x \neq -\frac{b}{2a}$,
    ***$ax^2 + bx + c$* est du signe de a (pour $x = -\frac{b}{2a}$, $f(x) = 0$)**

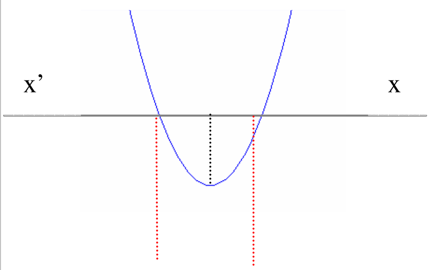
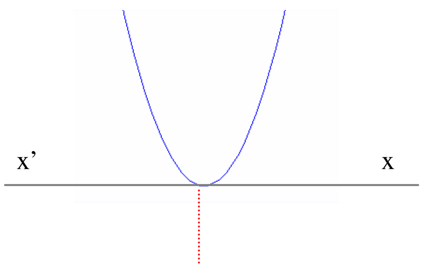
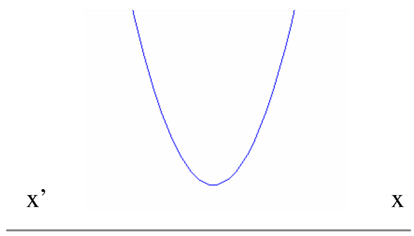
Ex : *Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation* $f(x) < 0$ avec $f(x) = 2x^2 + 5x - 3$

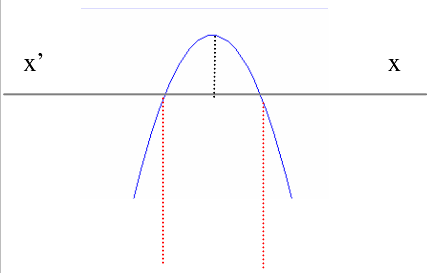
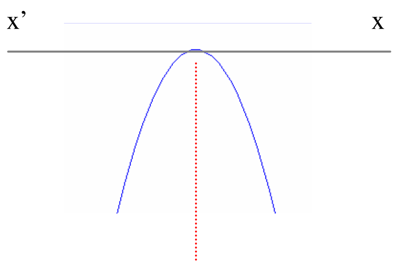
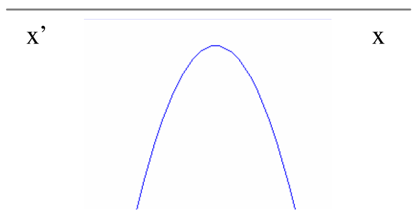
$\Delta = 49$ (> 0) ; les solutions de l'équation $2x^2 + 5x - 3 = 0$ sont donc $x_1 = -3$ et $x_2 = \frac{1}{2}$

Or $f(x)$ est du signe de $a = 2$ sauf entre les racines . Ainsi l'ensemble des solutions est $\mathbf{S =]-3\,;\frac{1}{2}[}$

5) Résumé

	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
Racines de *f*	$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$	$x_0 = -\dfrac{b}{2a}$	Pas de racine
Factorisa-tion	$f(x) = \boldsymbol{a}(x-x_1)(x-x_2)$	$f(x) = \boldsymbol{a}(x - x_0)^2 = \boldsymbol{a}(x + \dfrac{b}{2a})^2$	Pas de factorisation

a > 0			
Signe de f (x)	**+ 0 – 0 +**	**+ 0 +**	**+**

a < 0			
Signe de f (x)	**– 0 + 0 –**	**– 0 –**	**–**