Equations & Inéquations

I) Développements – Factorisations

1/ Somme – produit

Définitions :

a) Un calcul est appelé **somme** si la dernière opération à effectuer est une addition.
Chacun des nombres qui composent cette addition est appelé **terme** de la somme

b) Un calcul est appelé **produit** si la dernière opération à effectuer est une multiplication.
Chacun des nombres qui composent cette multiplication est appelé **facteur** du produit

Exemples :
$(x-5)(2t+3)$ est un produit. Les facteurs sont $(x-5)$ et $(2t+3)$.
$2a+5(b+1)-3$ est une somme. Les termes sont $2a$; $5(b+1)$ et -3.

2/ Développements

Définition : **Développer** un calcul contenant des produits c'est écrire ce calcul en transformant les produits en somme

Théorèmes : ***(A retenir !)***

Distributivité : Quels que soient les réels a, b, c et d : $a(b+c)=ab+ac$

$$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$$

Identités remarquables : Quels que soient les réels a et b : $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

Exemples :
$3a-5(2+a)+(3a-2)^2=3a-10-5a+9a^2-12a+4$
$(5x+2)(-x-3)-x+(2x+1)(2x-1)=-5x^2-15x-2x-6-x+4x^2-1$

Définition : **Réduire** une expression développée c'est l'écrire sous forme de somme contenant le moins de termes possible

Exemples :
$3a-10-5a+9a^2-12a+4=9a^2-14a-6$
$-5x^2-15x-2x-6-x+4x^2-1=-x^2-18x-7$

3/ Factorisations

Définition : **Factoriser** un calcul c'est l'écrire sous forme d'un produit

Pour factoriser une expression, on utilise aussi la distributivité et les identités remarquables mais dans l'autre sens :

On reconnaît un facteur commun : $ab+ac+ad=a(b+c+d)$

On reconnaît une identité remarquable : $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

Exemples :
$2x+x(x-y)=x(2+x-y)$
$(a-1)a+(a-1)-(a-1)(2a-2)=(a-1)(a+1-2a+2)=(a-1)(-a+3)$
$(2t-5)^2-36=(2t-5)^2-6^2=(2t-5+6)(2t-5-6)=(2t+1)(2t-11)$

II) Equations à une inconnue

1/ Généralités

Définition :
Une équation à une inconnue est une égalité dans laquelle figure une lettre représentant une valeur inconnue que l'on cherche à déterminer

Exemples :
(E_1) : $2x + 1 = 0$ est une équation d'inconnue x
(E_2) : $\sqrt{2t^2 + 1} = t + 1$ est une équation d'inconnue t
(E_3) : $y^3 - 3y^2 = 6y - 8$ est une équation d'inconnue y.

Définition :
Une **solution** d'une équation est une valeur de l'inconnue qui rend l'égalité vraie (Il peut y en avoir plusieurs)

Exemples
$-\frac{1}{2}$ est une solution de (E_1) car $2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = 0$
2 est une solution de (E_2) car $\sqrt{2 \times 2^2 + 1} = 2 + 1$
1 est une solution de (E_3) car $1^3 - 3 \times 1^2 = 6 \times 1 - 8$ et -2 est aussi une solution de (E_3) car $(-2)^3 - 3 \times (-2)^2 = 6 \times (-2) - 8$

Définition :
Résoudre une équation c'est déterminer l'ensemble de **toutes** les solutions de l'équation

Exemples
L'ensemble des solutions de (E_1) est $S_1 = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$
L'ensemble des solutions de (E_2) est $S_2 = \{0 ; 2\}$
L'ensemble des solutions de (E_3) est $S_3 = \{-2 ; 1 ; 4\}$

2/ Règles de calcul sur les égalités

Théorème :
On peut transformer une égalité en une égalité équivalente :
① en additionnant aux 2 membres de l'égalité un même nombre
② en multipliant les 2 membres de l'égalité par un même nombre **non nul.**

Exemples
$2x + 1 = 0 \iff 2x + 1 \mathbf{+ (-1)} = 0 \mathbf{+ (-1)} \iff 2x = -1 \iff 2x \times \mathbf{\frac{1}{2}} = -1 \times \mathbf{\frac{1}{2}} \iff x = -\frac{1}{2}$

3/ Résolutions algébriques

Parmi toutes les équations, certaines se résolvent en utilisant des techniques à savoir

a) Équations de degré 1

Méthode :
Pour résoudre une équation de degré 1 (c'est-à-dire sans x^2, x^3, sans $\sqrt{\ }$, sans dénominateur), on développe les expressions et on utilise la règle ① pour isoler l'inconnue dans un membre puis la règle ② pour déterminer la valeur de l'inconnue

Exemple
(E) : $3(x + 2) = x - 4 \iff 3x + 6 = x - 4 \iff 3x - x = -4 - 6 \iff 2x = -10 \iff x = \frac{-10}{2} = -5$ donc $S = \{-5\}$

b) Équation produit

Méthode :
Pour résoudre une équation de degré supérieur ou égal à 2, on utilise la règle ① pour rassembler toutes les expressions dans un seul membre, on factorise puis on utilise la règle : " Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul."

Exemple
(E) : $x(x + 1) = 2x + 2 \iff x(x + 1) - (2x + 2) = 0 \iff x(x + 1) - 2(x + 1) = 0 \iff (x + 1)(x - 2) = 0$
Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul
donc (E) $\iff x + 1 = 0$ ou $x - 2 = 0 \iff x = -1$ ou $x = 2$ donc $S = \{-1 ; 2\}$

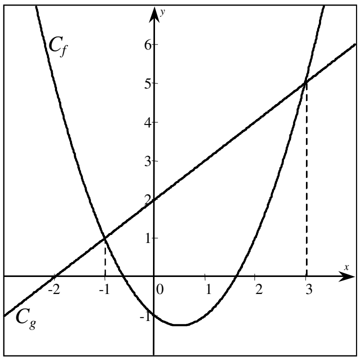
c) Équation quotient

Méthode :
Pour résoudre une équation quotient (c'est-à-dire une équation dans laquelle l'inconnue apparaît au dénominateur), on cherche les valeurs pour lesquelles les dénominateurs s'annulent et on résout l'équation dans $\mathbb{R}$ privé des valeurs trouvées précédemment

Exemple
(E) : $\dfrac{x(x-3)}{x-2} = \dfrac{2(x-3)}{x-2}$ Les dénominateurs sont nuls lorsque $x - 2 = 0$ soit $x = 2$
On résout donc l'équation (E) dans $\mathbb{R}-\{2\}$.
(E) $\Leftrightarrow x(x-3) = 2(x-3) \Leftrightarrow x(x-3) - 2(x-3) = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x-2) = 0 \Leftrightarrow x - 3 = 0$ ou $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ ou $x = 2$
Une seule de ces solutions convient donc S = {3}.

4/ Résolutions graphiques

Méthode :
On peut résoudre des équations en traçant les courbes correspondantes dans un repère et en lisant graphiquement les solutions



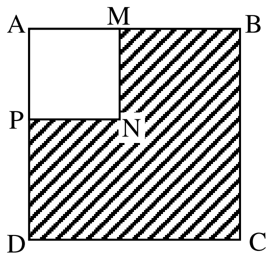
Exemple
(E) : $x^2 - x - 1 = x + 2$
Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2 - x - 1$ et g la fonction définie par $g(x) = x + 2$. On appelle C_f et C_g leurs représentations graphiques.
Les solutions de (E) sont les abscisses des points d'intersection de ces deux courbes donc S = {–1 ; 3}.

5/ Problème conduisant à une équation

Méthode :
Pour résoudre un problème conduisant à une équation, il faut respecter les quatre étapes suivantes :
① Choix de l'inconnue
② Mise en équation
③ Résolution de l'équation
④ Conclusion

Exemple :

ABCD est un carré de côté 20 cm. AMNP est un carré. Où placer le point M sur le segment [AB] pour que l'aire de la partie hachurée soit égale à 351 cm² ?



① Choix de l'inconnue
Soit x la longueur AM en cm. (Ne pas oublier de préciser les unités)

② Mise en équation
L'aire de ABCD est $20 \times 20 = 400$ cm² et l'aire de AMNP est x^2 donc l'aire de la partie hachurée est $400 - x^2$.
L'équation à résoudre est donc $400 - x^2 = 351$

③ Résolution
$400 - x^2 = 351 \Leftrightarrow 400 - x^2 - 351 = 0 \Leftrightarrow 49 - x^2 = 0 \Leftrightarrow (7-x)(7+x) = 0 \Leftrightarrow 7 - x = 0$ ou $7 + x = 0 \Leftrightarrow x = 7$ ou $x = -7$ donc S = {–7 ; 7}

④ Conclusion
Seule la solution positive convient car AM est une longueur.
M doit donc être situé à 7 cm de A.

III) Inéquations à une inconnue

1/ Signe d'une expression

a) Tableau de signe

Théorème :
Le signe d'une expression dépendant de x se résume dans un tableau de la forme suivante :

x	$-\infty$		r		r'	
signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$

Exemples :

x	$-\infty$		2		5		$+\infty$
signe de $A(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$A(x)$ est négatif pour x compris entre 2 et 5.
$A(x)$ est positif pour x inférieur à 2 ou supérieur à 5.
$A(2) = A(5) = 0$.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
signe de $B(x)$		$+$	$\Vert$	$+$	

$B(-1)$ n'existe pas
$B(x)$ est positif pour toute valeur de x différente de -1

b) Signe d'une fonction affine

Théorème :
Soit f une fonction affine définie par $f(x) = ax + b$. Le signe de f est donné, selon le signe de a, par les tableaux suivants :

Si $\boldsymbol{a > 0}$ alors f est croissante donc :

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	

Si $\boldsymbol{a < 0}$ alors f est décroissante donc :

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	

Exemples :
$f : x \longmapsto \frac{1}{2}x + 1$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x = -1 \Leftrightarrow x = -2$

La racine de f est -2

$\frac{1}{2}$ est positif donc f est croissante, le signe de f est donc donné par le tableau suivant :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	

$g : x \longmapsto -3x + 2$

$g(x) = 0 \Leftrightarrow -3x + 2 = 0 \Leftrightarrow -3x = -2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$

La racine de g est $\frac{2}{3}$

-3 est négatif donc g est décroissante, le signe de g est donc donné par le tableau suivant :

x	$-\infty$		$\dfrac{2}{3}$		$+\infty$
Signe de $g(x)$		$+$	0	$-$	

On peut retenir uniquement la règle suivante :
Théorème :
Soit f une fonction affine définie par $f(x) = ax + b$. Le signe de f est donné par le tableau :

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
Signe de $f(x)$		signe de $-a$	0	signe de a	

c) Signe d'un produit, d'un quotient

Théorème :
Le produit ou le quotient de deux réels positifs est positif
Le produit ou le quotient de deux réels négatifs est positif
Le produit ou le quotient de d'un réel positif et d'un réel négatif est négatif

Remarque : On utilise ces règles pour construire le tableau de signes d'une expression écrite sous forme d'un produit ou d'un quotient.

Exemple : Tableau de signes de $h(x) = f(x) \times g(x) = \left(\frac{1}{2}x + 1\right) \times (-3x + 2)$.

x	$-\infty$		-2		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
signe de $f(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $g(x)$		$+$		$+$	0	$-$	
signe de $h(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

2/ Règles de calcul sur les inégalités

Théorème :

① On peut transformer une inégalité en une inégalité équivalente en additionnant aux deux membres de l'inégalité un même nombre
② On peut transformer une inégalité en une inégalité de **même sens** en multipliant les deux membres de l'inégalité par un même nombre **strictement positif**
③ On peut transformer une inégalité en une inégalité de **sens contraire** en multipliant les deux membres de l'inégalité par un même nombre **strictement négatif**

Exemples

$2x + 1 < 0 \underset{\text{règle ①}}{\Leftrightarrow} 2x + 1 + \mathbf{(-1)} < 0 + \mathbf{(-1)} \Leftrightarrow 2x < -1 \underset{\text{règle ②}}{\Leftrightarrow} 2x \times \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} < -1 \times \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \Leftrightarrow x < -\frac{1}{2}$

$-2x + 1 < 0 \underset{\text{règle ①}}{\Leftrightarrow} -2x + 1 + \mathbf{(-1)} < 0 + \mathbf{(-1)} \Leftrightarrow -2x < -1 \underset{\text{règle ③}}{\Leftrightarrow} -2x \times \left(-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right) > -1 \times \left(-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right) \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}$

3/ Inéquations à une inconnue

Parmi toutes les inéquations, certaines se résolvent en utilisant des techniques à savoir

a) Inéquation de degré 1

Méthode :
Pour résoudre une inéquation de degré 1 (c'est-à-dire sans x^2, x^3, sans $\sqrt{\ }$, sans dénominateur), on développe les expressions et on utilise la règle ① pour isoler l'inconnue dans un membre puis les règles ② et ③ pour déterminer les valeurs possibles de l'inconnue

Exemple :

(E) : $-3(x + 2) < x - 2 \Leftrightarrow -3x + 6 < x - 2 \Leftrightarrow -3x - x < -2 - 6 \Leftrightarrow -4x < -8 \Leftrightarrow x > \frac{-8}{-4} = 2$ donc $S =]2 ; +\infty[$

b) Inéquations de degré supérieur ou égal à 2

Méthode :
Pour résoudre une inéquation de degré supérieur ou égal à 2, on utilise la règle ① pour rassembler toutes les expressions dans un seul membre, on factorise puis on construit le tableau de signes de l'expression. L'ensemble des solutions sera lu directement dans le tableau

Exemple

(E) : $x(x+1) < 2x+2 \quad \Leftrightarrow \quad x(x+1) - (2x+2) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(x+1) - 2(x+1) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+1)(x-2) < 0$

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
signe de $x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $(x+1)(x-2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Par lecture du tableau, on obtient : S = [–1 ; 2].

c) Équation quotient

Méthode :
Pour résoudre une inéquation quotient (c'est-à-dire une inéquation dans laquelle l'inconnue apparaît au dénominateur), on utilise la règle ① pour rassembler toutes les expressions dans un seul membre, on réduit au même dénominateur puis on construit le tableau de signes de l'expression. L'ensemble des solutions sera lu directement dans le tableau

Exemple :

(E) : $\dfrac{x(-x-3)}{x-2} > \dfrac{4(-x-3)}{x-2} \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{x(-x-3)}{x-2} - \dfrac{4(-x-3)}{x-2} > 0$

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{(x-4)(-x-3)}{x-2} > 0$

x	$-\infty$		-3		2		4		$+\infty$
signe de $x-4$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $-x-3$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	
signe de $x-2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $\dfrac{(x-4)(-x-3)}{x-2}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

Par lecture du tableau, on obtient : S =]–∞ ; –3] ∪]2 ; 4].

4/ Résolutions graphiques

Méthode :
On peut résoudre des équations en traçant les courbes correspondantes dans un repère et en lisant graphiquement les solutions

Exemple :

(E) : $x^2 - x - 1 < x + 2$

Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2 - x - 1$ et g la fonction définie par $g(x) = x + 2$. On appelle C_f et C_g leurs représentations graphiques.

Les solutions de (E) sont les abscisses des points de C_f situés « en dessous » de C_g donc S = [–1 ; 3]