Chapitre 1. Calcul Numérique

I) Ensembles de nombres

1. Les nombres entiers

Définition 0 ;1 ;2 ;3 ;… sont les nombres entiers naturels.
l'ensemble de ces nombres est noté $\mathbb{N}$ (comme *naturel*) (ici on se déplace de 1 en 1)

ex $7 \in \mathbb{N}$ mais $-7 \notin \mathbb{N}$ et $3{,}8 \notin \mathbb{N}$.

Définition … ;-3 ;-2 ;-1 ;0 ;1 ;2 ;3 ;… sont les nombres entiers relatifs. (ils sont négatifs, positifs ou nuls)
l'ensemble de ces nombres est noté $\mathbb{Z}$ (comme *zahl* qui signifie nombre en allemand)
(ici on se déplace de –1 en –1 et de 1 en 1)

ex : $7 \in \mathbb{N}$ mais $-7 \in \mathbb{N}$ et $3{,}8 \notin \mathbb{N}$

rque : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ « $\mathbb{N}$ est inclus dans $\mathbb{Z}$ » c'est à dire que tout entier naturel est un entier relatif.

2. Les nombres rationnels

Définition les nombres rationnels sont les quotient $\frac{a}{b}$ où $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$
l'ensemble de ces nombres est noté $\mathbb{Q}$ (comme *quotient*)

rque $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ .en effet, soit $a \in \mathbb{Z}$. on sait que $a = \frac{a}{1}$ comme $1 \in Z$ et $1 \neq 0$ alors $\frac{a}{1} \in \mathbb{Q}$ donc $a \in \mathbb{Q}$
d'où si $a \in \mathbb{Z}$ alors $a \in \mathbb{Q}$ i.e $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

ex : $7 \in \mathbb{Q}$; $\frac{5}{2} \in \mathbb{Q}$; $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$; $3{,}8 \in \mathbb{Q}$ car $3{,}8 = \frac{38}{10}$

rque un même nombre rationnel peut s'écrire sous forme fractionnaire d'une infinité de façons.
par exemple, $\frac{4}{3} = \frac{8}{6} = \frac{12}{9} = \frac{20}{15} = \frac{24}{18} = \ldots\ldots$

3. Cas particuliers :les nombres décimaux

Définition les nombres qui sont le quotient d'un entier relatif par une puissance de dix sont appelés nombres décimaux (décimal : *dix*)
l'ensemble de ces nombres est noté $\mathbb{D}$ (comme décimal)

rques * $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$ les décimaux sont des rationnels particuliers ($10^p \neq 0$ et $10^p \in Z$, $p \in \mathbb{N}$)
* comme on divise un entier par une puissance de dix cela signifie que les décimaux sont des nombres à virgules ayant un nombre fini de chiffres après la virgule

ex : $\frac{1385}{100} = 13{,}85 \in \mathbb{D}$

13 est la partie entière de 13,85

0,85 est la partie décimale de 13,85

notation fractionnaire — notation décimale

$-\frac{4}{1000} = -0{,}004 \in \mathbb{D}$

0 est la partie entière de –0,004

-0,004 est la partie décimale de 0,004

$\frac{3}{4} = \frac{75}{100} \in \mathbb{D}$

mais $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$ car on ne peut pas se ramener à une puissance de dix au dénominateur. de plus $\frac{1}{3}$ = 0,33333333….. l'écriture décimale ne s'arrête pas.

Définition tout nombre décimal peut s'écrire $a \times 10^p$ ou $-a \times 10^p$ où a est un décimal tel que $1 \leq a < 10$ et p un entier relatif.
cette écriture est appelée notation scientifique du nombre.
10^p est appelé l'ordre de grandeur du nombre.

rque cette écriture est souvent plus commode notamment pour comparer des nombres (il faut juste comparer les « a ») ; changer d'unité ;donner l'ordre de grandeur du résultat d'une opération. elle est très utile en physique-chimie.

ex : $2328423 = 2{,}328423 \times 10^6$
sur la calculatrice 2.328423 E6
E pour exposant E6 signifie 10^6

10^6 est l'ordre de grandeur de 2328423

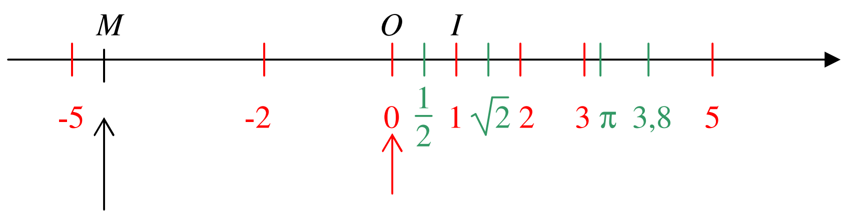
$-0{,}00032 = -3{,}2 \times 10^{-4}$ sur la calculatrice -3.2 E-4

10^{-4} est l'ordre de grandeur de –0,00032

4. Les autres nombres

ils existent des nombres qui n'appartiennent à aucun des ensembles que nous venons de voir.
on démontre par exemple que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$; $\frac{-\sqrt{3}}{2} \notin \mathbb{Q}$; $\pi \notin \mathbb{Q}$
ces nombres sont appelés nombres irrationnels (*i.e* « qui ne sont pas rationnels »)
ils appartiennent avec tous les nombres précédents à l 'ensemble des nombres réels qui est noté $\mathbb{R}$ (comme réel)

l'ensembles des nombres réels est aussi l'ensemble des abscisses des points d'une droite graduée. (c'est à dire munie d'un repère (O ;I)).
Cette droite, qui représente alors $\mathbb{R}$ est appelée droite des réels ou droite numérique réelle.



abscisse du point *M* dans le repère (*O* ;*I*)

zéro est le seul nombre à la fois positif et négatif

Résumé

les différents ensembles de nombres sont emboîtés.
on a donc $\boxed{\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}}$

cf Schéma des ensembles "emboîtés"

rques :

- dans les exercices « soit x un nombre quelconque » sera désormais remplacé par : « soit $x \in \mathbb{R}$ » ou « soit x un nombre réel »
- le signe * placé en haut à droite de la lettre désignant un ensemble de nombres, prive celui-ci de zéro. Ainsi $\mathbb{R}^*$ désigne les réels non nuls.
- le signe + / – placé en haut à droite de la lettre désignant un ensemble de nombre, prive celui-ci des nombres négatifs positifs. ainsi $\mathbb{R}^+$ désigne l'ensemble des réels positifs (avec zéro) $\mathbb{R}^-$ désigne l 'ensemble des réels négatifs (avec zéro)

5. Valeur approchée

Définition on appelle valeur approchée d'un nombre x à la précision e ou à e près tout nombre a tel que

$$\boxed{a - e \leq x \leq a + e}$$

ex: 1,4 est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 0,01 près (10^{-1} près)
car $1{,}4 - 0{,}1 \leq \sqrt{2} \leq 1{,}4 + 0{,}1$
$1{,}4 = a \quad 0{,}1 = e \quad \sqrt{2} = x$

II) Nombres premiers

1. Diviseur d'un nombre entier naturel

Définition soit $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}^*$
on dit que b est un diviseur de a s'il existe un entier naturel k tel que $a = k \times b$

ex : $12 = 4 \times 3 = 1 \times 12 = 6 \times 2$
4, 3, 1, 12, 6 et 2 sont des diviseurs de 12
par contre 5 n'est pas un diviseur de 12 car $12 \div 5 \notin \mathbb{N}$

2. Nombres premiers

Définition un nombre entier naturel est premier s'il admet exactement deux diviseurs : 1 et lui-même

ex : 12 n'est pas premier
5 est premier

les premiers nombres premiers : 2 ;3 ;5 ;7 ;11 ;13 ;17 ;19 ;…….
(voir **Crible d'Eratosthène** *cahier d'exercices*)

rques

- 1 n'est pas premier car il n'a qu'un seul diviseur : 1
- 2 est le seul nombre premier pair
- il y a une infinité de nombres premiers

3. Décomposition en produit de facteurs premiers

Théorème tout entier naturel *non premier* se décompose en produit de facteurs premiers

ex : $28 = 2 \times 14 = 2 \times 2 \times 7 = 2^2 \times 7$

$$\begin{array}{r|l} 28 & 2 \\ 14 & 2 \\ 7 & 7 \\ \boxed{1} & \end{array}$$

$60 = 2 \times 30 = 2 \times 2 \times 15 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 2^2 \times 3 \times 5$

$$\begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 28 & 2 \\ 14 & 3 \\ 5 & 5 \\ \boxed{1} & \end{array}$$

4. Critères de divisibilité

par 2 : le nombre se termine par un chiffre pair : 0, 2, 4, 6, 8
par 3 : la somme des chiffres du nombres est divisible par 3
par 5 : le nombre se termine par 0 ou 5
par 9 : la somme des chiffres du nombre est divisible par 9
par 10 : le nombre est divisible par 2 et 5 c'est à dire il se termine par 0

5. Applications

a) Simplifier les fractions

$$\frac{84}{60} = \frac{2 \times 2 \times 3 \times 7}{2 \times 2 \times 3 \times 5} = \frac{7}{5}$$ fraction irréductible

b) Simplifier les racines carrées

$$\begin{aligned} \sqrt{2100} &= \sqrt{2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7} \\ &= \sqrt{2^2 \times 5^2 \times 3 \times 7} \\ &= \sqrt{(2 \times 5)^2 \times 3 \times 7} \\ &= \sqrt{(2 \times 5)^2} \times \sqrt{3 \times 7} \\ &= 2 \times 5 \times \sqrt{3 \times 7} \\ &= 10\sqrt{21} \end{aligned}$$

c) Calculer le PGCD de deux nombres entiers naturels

pgcd(36 ; 120) = ?

$$\begin{array}{r|l} 36 & \boxed{2} \\ 18 & \boxed{2} \\ 9 & \boxed{3} \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 120 & \boxed{2} \\ 60 & \boxed{2} \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

pgcd (36 ; 120) = $2 \times 2 \times 3 = 12$