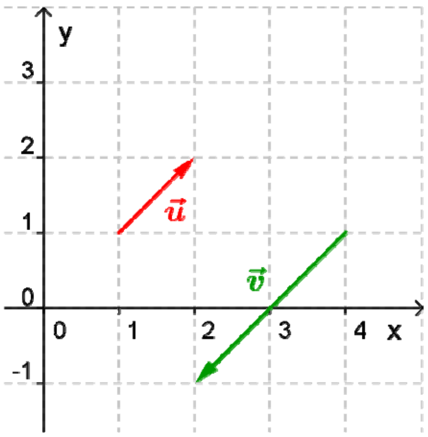
Colinéarité de deux vecteurs

I) Propriété caractéristique de colinéarité de deux vecteurs :

1) Définition

Deux vecteurs non nuls, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, il existe un nombre réel λ non nul tel que $\vec{v}$ = $\vec{u}$.

Exemple :



$\vec{v} = -2\,\vec{u}$.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

Remarque :

• Deux vecteurs non nuls sont colinéaires si, et seulement si, ils ont la même direction.

• Le vecteur nul $\vec{0}$ est colinéaire à tous les vecteurs.

Exemples :

a) $\vec{u}$ (2 ; − 3) et $\vec{v}$ (10 ; − 15) sont colinéaires en effet 10 = 2 x **5** et −15 = −3 x **5**

donc $\vec{v}$ = **5** $\vec{u}$.

b) $\vec{u}$ ($\frac{1}{3}$; − $\frac{3}{5}$) et $\vec{v}$ ($\frac{2}{9}$; − $\frac{1}{5}$) sont colinéaires en effet $\frac{2}{9} = \mathbf{\frac{1}{3}} \times \frac{2}{3}$ et $-\frac{1}{5} = \mathbf{\frac{1}{3}} \times -\frac{3}{5}$

donc $\vec{v} = \mathbf{\frac{1}{3}}\,\vec{u}$.

c) $\vec{u}$ (4 ; 5) et $\vec{v}$ (8 ; −10) ne sont pas colinéaires en effet :
$\vec{u}$ ≠ 0 et $\vec{v}$ ≠ 0 et s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{v} = \lambda\,\vec{u}$, alors 8 = λ x 4 donc $\boldsymbol{\lambda}$ **= 2** et -10 = λ x 5 donc $\boldsymbol{\lambda}$ **= -2** . C'est absurde !! $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

2) Propriété

Dans un repère, on donne les vecteurs $\vec{u}$ $(x\,;\,y)$ et $\vec{v}\,(x'\,;\,y')$

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, si, et seulement si, $x\,y' - y\,x' = 0$

Exemples :

a) $\vec{u}$ (2 ; − 3) et $\vec{v}$ (10 ; − 15) sont-ils colinéaires?

Réponse : $2 \times (-15) - (-3) \times 10 = -30 + 30 = 0$ **$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc colinéaires.**

b) $\vec{u}$ (7 ; − 4) et $\vec{v}$ (14 ; 8) sont-ils colinéaires?

Réponse : $7 \times 8 - (-4) \times 14 = 56 - (-56) = 56 + 56 = 112 \neq 0$
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont donc pas colinéaires.

Démonstration :

Soit (O, $\vec{\imath}$, , $\vec{\jmath}$) un repère du plan . Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées respectives dans ce plan : $\vec{u}$ $(x\,;\,y)$ et $\vec{v}\,(x'\,;\,y')$.

● Tout d'abord montrons que si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors $x\,y' - yx' = 0$:

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls, comme $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires par hypothèse, alors il existe un réel λ non nul tel que $\vec{v} = \lambda\,\vec{u}$. cela se traduit sur les coordonnées par : $x' = \lambda\,x$ et $y' = \lambda\,y$
  $xy' - y\,x' = x\,\lambda\,y - y\lambda\,x = \lambda\,x\,y - \lambda\,x\,y = 0$.

- Si l'un des vecteurs est nul alors la relation est clairement vérifiée.

• Montrons maintenant la propriété réciproque :
si $x\,y' - yx' = 0$ alors les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires :

- Supposons $\vec{u}$ non nul, l'une de ses coordonnées est donc non nulle.

  *** Si** $x \neq 0$ alors $x\,y' - yx' = 0$ peut s'écrire **:** $y' = \dfrac{x'}{x}\,y$,

  c'est-à-dire $y' = \lambda\,y$ avec $\lambda = \dfrac{x'}{x}$. Et comme $\dfrac{x'}{x}.\,x = x'$ on a aussi $x' = \lambda\,x$.

  Donc le vecteur $\vec{v}$ a pour coordonnées : $\vec{v}\,(\lambda\,x\,;\,\lambda\,y)$ on a donc $\vec{v} = \lambda\vec{u}$
  $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc colinéaires.

  *** Si** $y \neq 0$ alors $x\,y' - yx' = 0$ peut s'écrire **:** $x' = \dfrac{y'}{y}\,x$,

  c'est-à-dire $x' = \lambda\,x$ avec $\lambda = \dfrac{y'}{y}$. Et comme $\dfrac{y'}{y}.\,y = y'$ on a aussi $y' = \lambda\,y$

  Donc le vecteur $\vec{v}$ a pour coordonnées : $\vec{v}\,(\lambda\,x\,;\,\lambda\,y)$ on a donc $\vec{v} = \lambda\vec{u}$.

  $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc colinéaires

- Supposons $\vec{u}$ nul alors $\vec{u} = \vec{0}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc colinéaires.

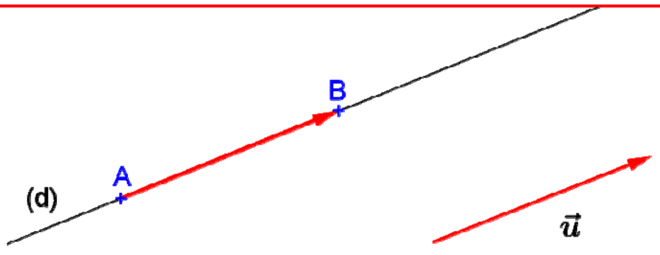
Remarque :

$\vec{u}$ $(x\ ;\ y)$ et $\vec{v}\,(x'\ ;\ y')$ ne sont pas colinéaires si, et seulement si $x\ y' - yx' \neq 0$.

II) Vecteurs directeur d'une droite :

1) Définition

$\vec{u}$ (non nul) est un vecteur directeur d'une droite (d) signifie qu'il existe deux points distincts A et B de cette droite (d) tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.



$\vec{u} \neq 0$,
$\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite (d) : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

2) Théorème

Soit (d) une droite et $\vec{u}$ un vecteur directeur de (d). Soit $\vec{v} \neq 0$ un vecteur. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors $\vec{v}$ est un vecteur directeur de (d).

L'ensemble des vecteurs directeurs de (d) est $\{\vec{v} \in \vec{\mathcal{E}}, \exists\, k \in \mathbb{R}^* / \vec{u} = k\vec{v}\}$

Exemple : Le vecteur $\vec{u}$ (-2 ; 3) est un vecteur directeur de la droite (d) dont une équation cartésienne est : $3x + 2y + 5 = 0$.

Le vecteur $\vec{v}$ (-8 ; 12) est colinéaire au vecteur $\vec{u}$: En effet $\vec{v} = 3\,\vec{u}$

Alors $\vec{v}$ est aussi un vecteur directeur de la droite (d)

Les vecteurs directeurs de (d) sont de la forme : $(-2k\ ;\ 3k)$ $k \in \mathbb{R}^*$

3) Conséquence

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs directeurs respectifs de deux droites (d) et (d')

Les droites (d) et (d') sont parallèles si, et seulement si, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

Exemples :

Exemple 1 :

Soit (d) la droite de vecteur directeur. $\vec{u}$ (-3 ; 8) et (d') la droite de vecteur directeur $\vec{v}$ (6 ;-16). Les droites (d) et (d') sont-elles parallèles ?

Réponse : On remarque que $\vec{v}$ = **-2** $\vec{u}$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc colinéaires.
Les droites (d) et (d') sont donc parallèles .

Exemple 2 :

Soit les points A (1 ; 3) , B (5 ; 2) , C (6 ; 5) et D (10 ; − 2). Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ?

Réponse :

$\overrightarrow{AB}$ (5 − 1 ; 2 − 3)	$\overrightarrow{AB}$ **(4 ; −1)**
$\overrightarrow{CD}$ (10 − 4 ; − 2 − 5)	$\overrightarrow{CD}$ **(6 ; − 7)**

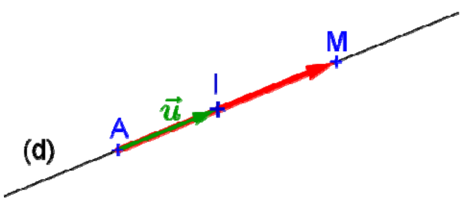
Les droites (AB) et (CD) ont respectivement les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ (4 ; −1) et $\overrightarrow{CD}$ (6 ; − 7) comme vecteurs directeurs. **Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ n'étant pas colinéaires, les droites ne sont donc pas parallèles.**

3) Propriété

(d) est une droite passant par un point A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

La droite (d) est l'ensemble des point M du plan, tel que les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires.

Démonstration :



Soit I le point de la droite (d) tel que $\overrightarrow{AI}$ **=** $\vec{u}$.

M appartient à la droite (d) si, et seulement si ,les points A, I , M sont alignés .

Or A, I , M sont alignés si , et seulement si , $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires.

Comme $\overrightarrow{AI}$ **=** $\vec{u}$. Alors A, I , M sont alignés si , et seulement si , $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires.

Nous venons donc de montrer que M appartient à la droite (d) si, et seulement si, $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires.