Chapitre VI : Fonction exponentielle

I. La fonction exponentielle

a) Définition

La fonction exponentielle, notée exp, est la fonction définie sur ℝ par $\exp(x) = e^x$, e^x étant l'unique nombre réel strictement positif dont le logarithme népérien est x.

b) Conséquences

Propriétés :

1. Pour tout réel x, $e^x > 0$.
2. Pour tout réel x, $\ln(e^x) = x$.
3. Pour tout réel $x > 0$, $e^{\ln x} = x$.
4. Pour tout réel x et tout réel $y > 0$, $y = e^x$ équivaut à $\ln y = x$.

Exemples :

- $e^x = 3$ équivaut à $x = \ln 3$.
- $e^x = -1$ n'a pas de solution car pour tout réel x, $e^x > 0$.
- $e^{x+1} = 7$ est définie pour tout réel x ;

$e^{x+1} = 7$ équivaut à $x + 1 = \ln 7$, c'est à dire $x = \ln 7 - 1$

- L'inéquation $e^{2x-6} < 4$ est définie pour tout réel x.

$e^{2x-6} < 4$ équivaut à $\ln(e^{2x-6}) < \ln 4$ (car la fonction ln est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$)

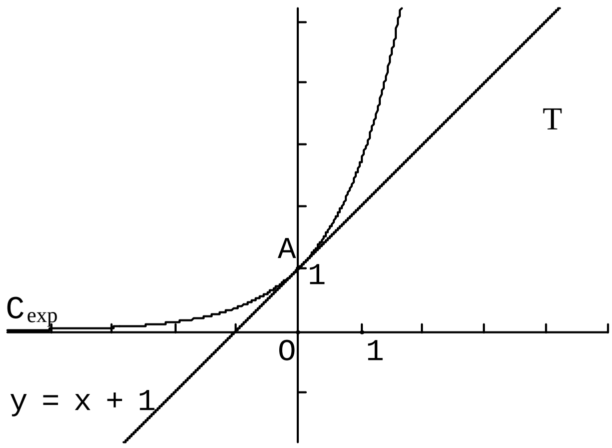
on a alors : $2x - 6 < \ln 4$, c'est à dire : $x < \dfrac{\ln 4 + 6}{2}$; $x < \ln 2 + 3$.

L'ensemble des solutions est alors : $]-\infty ; 3 + \ln 2[$.

- L'inéquation $2e^{4-3x} + 5 > 1$ est définie pour tout réel x.

$2e^{4-3x} + 5 > 1$ équivaut à $e^{4-3x} > -2$. Or pour tout réel X, $e^X > 0$, donc tout réel x vérifie $e^{4-3x} > -2$.
L'ensemble des solutions de l'inéquation $2e^{4-3x} + 5 > 1$ est ℝ.

c) représentation graphique



T est la tangente à C_{exp} au point A d'abscisse 0.
Une équation de T est de la forme :
$y = x + 1$.

De plus la courbe C_{exp} est au-dessus de T sur ℝ.
Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq x + 1$.

II. Propriétés algébriques

Propriétés :

1. Pour tous réels a et b, $a^{a+b} = e^a e^b$.
2. Pour tous réels $a_1, a_2, \ldots, a_p$, $e^{a_1 + a_2 + \ldots + a_p} = e^{a_1} e^{a_2} \ldots e^{a_p}$.
3. Pour tout réel a et tout entier p, $(e^a)^p = e^{pa}$.
4. Pour tout réel a, $e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$.
5. Pour tous réels a et b, $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$.

Exemples :

- $e^{5+2x} = e^5 e^{2x} = e^5(e^x)^2$.
- $e^{3a-5} = \dfrac{e^{3a}}{e^5}$
- $e^{x - \ln 2} = \dfrac{e^x}{e^{\ln 2}} = \dfrac{e^x}{2}$.

- $e^{x^2+3x+2} = e^{x^2} e^{3x} e^2$.
- $\dfrac{e^x}{e^{2x+1}} = e^{x-(2x+1)} = e^{-x-1} = \dfrac{1}{e^{x+1}}$.

Exemples :
- Résoudre $e^{2x} e^{3x-1} \geq 2$

L'inéquation est définie pour tout réel x.
Pour tout réel x, $e^{2x} e^{3x-1} = e^{2x+3x-1} = e^{5x-1}$.

On a alors : $e^{5x-1} \geq 2$, c'est à dire $5x - 1 \geq \ln 2$. Donc $x \geq \dfrac{1+\ln 2}{5}$.

L'ensemble des solutions est alors : $[\dfrac{1+\ln 2}{5} ; +\infty[$.

- Résoudre $-2e^{2x} + 5e^x + 3 = 0$.

On pose $X = e^x$, l'équation devient alors : $-2X^2 + 5X + 3 = 0$
$\Delta = 5^2 - 4 \times (-2) \times 3 = 49$ et $\sqrt{\Delta} = 7$

Les racines du trinôme sont alors : $X_1 = \dfrac{-5-7}{2 \times (-2)} = 3$ et $X_2 = \dfrac{-5+7}{2 \times (-2)} = -\dfrac{1}{2}$.

On résout alors :
$e^x = 3$, et on obtient : $x = \ln 3$.
$e^x = -\dfrac{1}{2}$, et comme $e^x > 0$ pour tout x réel, on n'a alors pas de solution.
Donc la seule solution de l'équation est ln 3.

- Résoudre $-2e^{2x} + 5e^x + 3 < 0$.

En posant $X = e^x$, on obtient $-2X^2 + 5X + 3 < 0$ pour $X \in]-\infty ; -\dfrac{1}{2}[\cup] 3 ; +\infty[$, c'est à dire $X < -\dfrac{1}{2}$ ou $X > 3$

On résout alors :
$e^x < -\dfrac{1}{2}$ qui n'a pas de solution car $e^x > 0$.
$e^x > 3$, qui nous donne : $x > \ln 3$.
L'ensemble des solutions de l'inéquation est alors $]\ln 3 ; +\infty[$.

III. Etude de la fonction exp

a) sens de variation

Propriété : La fonction exp est strictement croissante sur ℝ, c'est à dire :
si $a < b$ alors $e^a < e^b$.

Conséquence : pour tout réel a, $e^a > 1$ équivaut à $a > 0$.

b) limites

Propriété 1 : $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$.

on en déduit que l'axe des abscisses (c'est à dire la droite d'équation $y = 0$) est asymptote à la courbe représentant la fonction exponentielle en $-\infty$.

Propriété 2 : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

En effet, on a vu que pour tout réel x, $e^x \geq x + 1$
et $\lim\limits_{x \to +\infty} x + 1 = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.

Exercices :
- $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x^2+3x-1}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 + 3x - 1 = \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} e^X = +\infty$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x^2+3x-1} = +\infty$.

- $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{\frac{2x+1}{3x-2}}$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x+1}{3x-2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x}{3x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{3}$.

donc $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{\frac{2x+1}{3x-2}} = e^{\frac{2}{3}}$

- $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{2}{3} \\ x < \frac{2}{3}}} e^{\frac{2x+1}{3x-2}}$; $\lim\limits_{x \to \frac{2}{3}} 2x + 1 = \dfrac{7}{3}$ et $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{2}{3} \\ x < \frac{2}{3}}} 3x - 2 = 0^-$ d'où $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{2}{3} \\ x < \frac{2}{3}}} \dfrac{2x+1}{3x-2} = -\infty$.

et $\lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{2}{3} \\ x < \frac{2}{3}}} e^{\frac{2x+1}{3x-2}} = 0$

c) dérivée et primitive

Propriété : La fonction exponentielle est dérivable sur ℝ, et est égale à sa fonction dérivée :
pour tout x réel, $\exp'(x) = \exp(x)$.

Conséquence : Une primitive sur ℝ de la fonction $x \mapsto e^x$ est la fonction $x \mapsto e^x$.

Exemple : La fonction f est définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$.

f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$; $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ où $u(x) = e^x$; $u'(x) = e^x$
$v(x) = x$; $v'(x) = 1$

$f' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$; $f'(x) = \dfrac{e^x \times x - e^x \times 1}{x^2}$

$f'(x) = e^x \times \dfrac{x-1}{x^2}$

IV. Fonction exp(u)

a) dérivée de exp(u)

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, alors la fonction $f : x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I, et pour tout réel x de I, $f'(x) = e^{u(x)} \times u'(x)$.

Exemple 1 : La fonction $g : x \mapsto e^{4x-3}$ est définie et dérivable sur ℝ.
$g(x) = e^{u(x)}$ où $u(x) = 4x - 3$; $u'(x) = 4$
$g' = u' e^u$
Donc pour tout $x \in$ ℝ, $g'(x) = 4 \times e^{4x-3}$.

Exemple 2 : Déterminer la dérivée de $f : x \mapsto e^{\frac{1}{x}}$
f est définie sur ℝ\{0}. f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et sur $]-\infty ; 0[$.
$f(x) = e^{u(x)}$ où $u(x) = \dfrac{1}{x}$; $u'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

$f'(x) = u'(x) \times e^{u(x)} = -\dfrac{1}{x^2}\, e^{\frac{1}{x}}$

Exemple 3 : La fonction $h : x \mapsto e^{x^2-2x} + \dfrac{3}{4}x^4$ est définie et dérivable sur ℝ.
$h(x) = e^{u(x)} + v(x)$ où $u(x) = x^2 - 2x$; $u'(x) = 2x - 2$
$v(x) = \dfrac{3}{4}x^4$; $v'(x) = 3x^3$

$h' = u' \times e^u + v'$
$h'(x) = (2x-2)e^{x^2-2x} + 3x^3$.

b) calcul de primitives

Si u est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I, alors une primitive sur I de la fonction $x \mapsto u'(x) \times e^{u(x)}$ est la fonction définie sur I par : $x \mapsto e^{u(x)}$.

Exemple 1 : La fonction $f : x \mapsto 2xe^{x^2-1}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Elle admet alors des primitives sur $\mathbb{R}$. On pose $u(x) = x^2 - 1$; $u'(x) = 2x$ d'où $f(x) = u'(x)\, e^{u(x)}$

Les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont de la forme : $F(x) = e^{u(x)} + k$ où $k \in \mathbb{R}$.

Exemple 2 : La fonction $g : x \mapsto (2x - 3)e^{-x^2+3x+1}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Elle admet alors des primitives sur $\mathbb{R}$. On pose $u(x) = -x^2 + 3x + 1$; $u'(x) = -2x + 3$ d'où $g(x) = -\, u'(x)\, e^{u(x)}$

Les primitives de g sur $\mathbb{R}$ sont de la forme : $G(x) = -\, e^{u(x)} + k$ où $k \in \mathbb{R}$.

Exemple 3 : La fonction $h : x \mapsto \dfrac{e^{\frac{1}{x+1}}}{(x+1)^2}$ est définie et continue sur $]-1 ; +\infty[$.

La fonction h admet des primitives sur $]-1 ; +\infty[$. On pose $u(x) = \dfrac{1}{x+1}$; $u'(x) = -\dfrac{1}{(x+1)^2}$

D'où $h(x) = -\, u'(x)\, e^{u(x)}$. Les primitives de h sont alors de la forme : $H(x) = -e^{\frac{1}{x+1}} + k$ où $k \in \mathbb{R}$.

V. Croissances comparées

Propriétés : Pour tout entier naturel n,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \quad ; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$$

On traduit ces règles par :

« A l'infini, l'exponentielle de x l'emporte sur toute puissance de x », et « à l'infini, les puissances de x l'emportent sur le logarithme de x ».

Exemple : g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x^2 + 2x - 3)e^x$. Etudier sa limite en $-\infty$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 + 2x - 3 = \lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$. On est donc en présence d'une forme indéterminée.

Pour tout réel x, $g(x) = x^2 e^x + 2x\, e^x - 3\, e^x$.

Or $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 e^x = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} 2x\, e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} -3\, e^x = 0$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 0$.

VI. Croissance exponentielle

a) la notation a^b (avec $a>0$ et b réel)

Définition : Pour tout réel $a > 0$ et tout réel b, le nombre a^b est défini par : $a^b = e^{b \ln a}$.

Remarque : si $a = 1$, $1^b = e^{b \ln 1} = e^0 = 1$. Donc pour tout réel b, $1^b = 1$.

b) Propriétés algébriques

Les règles de calcul, connues dans le cas d'exposants entiers s'étendent aux exposants réels non entiers.

Propriété : Pour tous réels $a > 0$ et $a' > 0$, et tous réels b et b' :

- $(aa')^b = a^b \times a'^b$
- $a^b\, a^{b'} = a^{b+b'}$
- $\dfrac{a^b}{a'^b} = \left(\dfrac{a}{a'}\right)^b$
- $\dfrac{a^b}{a^{b'}} = a^{b-b'}$
- $(a^b)^{b'} = a^{bb'}$

Remarque : $\ln a^b = b \ln a$. Cette formule, connue lorsque b est un entier, est également vraie lorsque b est un réel quelconque.

Exemple : si $a > 0$, simplifier $\dfrac{(2a)^{\sqrt{2}}}{a^{\sqrt{2}}}$.

Calculer $\left(11^{\frac{4}{3}}\right)^{0,75}$

c) racine n-ième d'un réel *a* strictement positif

Propriété : a est un réel strictement positif et n un entier naturel non nul.

Alors : $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a$;

$a^{\frac{1}{n}}$ est l'unique nombre strictement positif dont la puissance n-ième est égale à a.

Définition : Pour tout entier $n \geq 1$, pour tout réel $a > 0$, $a^{\frac{1}{n}}$ est la racine n-ième de a, et on note : $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$.

Cas particulier : si $n = 2$, on a alors, si $a > 0$: $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$.

d) Etude des fonction $x \mapsto a^x$ ($a > 0$)

Définition : a étant un réel **strictement positif**, on appelle **fonction exponentielle de base** $\boldsymbol{a}$, la fonction $x \mapsto a^x$, c'est à dire $x \mapsto e^{x \ln a}$.

Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$.

Remarques :

- Pour tout x réel , $e^{x \ln a} > 0$, donc $a^x > 0$.
- La fonction $x \mapsto a^x$ est de la forme $x \mapsto e^{u(x)}$ avec $u(x) = x \ln a$.

Les propriétés de cette fonction se déduiront donc de celles de la fonction exponentielle.

- Si on pose $a = e$, on retombe sur la fonction exponentielle.

Fonction dérivée de $x \mapsto a^x$ ($a > 0$)

La dérivée de la fonction $x \mapsto a^x$ est la fonction $x \mapsto a^x \ln a$.

Exemple :

- Si $f(x) = 3^x$, alors $f'(x) = 3^x \ln 3$.
- Si $g(x) = (\sqrt{2})^x$, alors $g'(x) = (\sqrt{2})^x \ln \sqrt{2} = \frac{1}{2} \ln 2 \times (\sqrt{2})^x$.

On en déduit le sens de variation de $f : x \mapsto a^x$ (avec $a > 0$).

$f'(x) = a^x \ln a$ et $a^x > 0$ pour tout x réel. Donc :

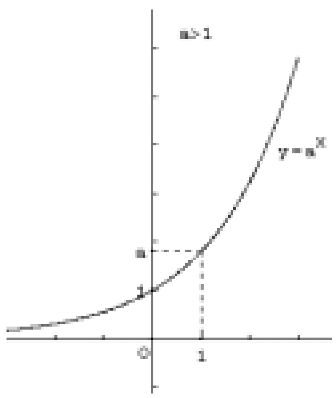
Propriété :

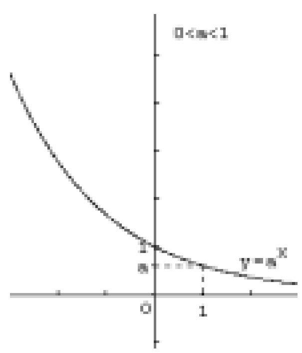
- Lorsque $a > 1$, la fonction $x \mapsto a^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- Lorsque $0 < a < 1$, la fonction $x \mapsto a^x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de $x \mapsto a^x$ ($a > 0$)

- Lorsque $a > 1$, $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$
- Lorsque $0 < a < 1$, $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$.

Courbes représentant $x \mapsto a^x$ ($a > 0$)





Dans le cas où $a = 1$, la fonction $x \mapsto a^x$ est constante et égale à 1. Sa courbe représentative est alors la droite d'équation $y = 1$.

e) lien avec les suites géométriques

Propriété : v est la suite géométrique de raison $a > 0$ et de premier terme $v_0 > 0$.

- Si $0 < a < 1$, v est décroissante. On parle de décroissance exponentielle.
- Si $a = 1$, v est constante.
- Si $a > 1$, v est croissante. On parle de croissance exponentielle.