LIMITES & ASYMPTOTES

I) Limtites en $+\infty$ et en $-\infty$

1) Limites intuitives (A Savoir !...)

Théorèmes (admis):

$$\lim_{x\to-\infty}(x)=-\infty \qquad \lim_{x\to+\infty}(x)=+\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty}(x^2)=+\infty \qquad \lim_{x\to+\infty}(x^2)=+\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty}(x^3)=-\infty \qquad \lim_{x\to+\infty}(x^3)=+\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty}(x^4)=+\infty \qquad \lim_{x\to+\infty}(x^4)=+\infty$$
$$\ldots\ etc$$

et

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=\mathbf{0} \qquad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)=\mathbf{0}$$
$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^3}\right)=\mathbf{0} \qquad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^4}\right)=\mathbf{0}$$
$$\ldots\ etc$$

2) Limite des fonctions polynômes

Théorème : La limite à l'infini d'une fonction polynôme est égale à la limite du monôme de plus haut degré

Soit en *notation mathématique* :

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\ldots+f\right)=\lim_{x\to\infty}\left(ax^n\right)=\pm\infty \qquad \text{pour } n\in\mathbb{N}}$$

preuve : $f(x)=ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\ldots+f \;=\; (x^n)\left(a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}+\ldots+\frac{f}{x^n}\right)$

Or, $\lim\limits_{x\to\infty}(a)=a$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{b}{x}\right)=0$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{c}{x^2}\right)=0$ … jusqu'à $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{f}{x^n}\right)=0$

Donc, on obtient : $\lim\limits_{x\to\infty}\left(a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}+\ldots+\frac{f}{x^n}\right)=a$

De plus, $\lim\limits_{x\to\infty}(x^n)=\pm\infty$ (selon la parité de n), d'où le résultat annoncé par "*produit*" !...

exemples :

a) $f(x)=3x^2-4x+5$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}(3x^2)=+\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(3x^2)=+\infty$$

b) $g(x)=-2x^2+3$

$$\lim_{x\to-\infty}g(x)=\lim_{x\to-\infty}(-2x^2)=-\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}(-2x^2)=-\infty$$

c) $h(x)=-4x^3+x^2-2x+4$

$$\lim_{x\to-\infty}h(x)=\lim_{x\to-\infty}(-4x^3)=+\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty}h(x)=\lim_{x\to+\infty}(-4x^3)=-\infty$$

d) $k(x)=x^4-6x^2+1$

$$\lim_{x\to-\infty}k(x)=\lim_{x\to-\infty}(x^4)=+\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty}k(x)=\lim_{x\to+\infty}(x^4)=+\infty$$

3) Limite des fonctions rationnelles

Théorème : La limite à l'infini d'une fonction rationnelle est égale à la limite des quotients des monômes de plus haut degré

Soit en *notation mathématique* :

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\ldots+f}{a'x^p+b'x^{p-1}+c'x^{p-2}+\ldots+f'}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{ax^n}{a'x^p}\right)=\begin{cases}\mathbf{0}\\ \dfrac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a'}}\\ \pm\infty\end{cases}\quad \text{selon les degrés } n \text{ et } p$$

preuve : $$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{ax^n+b^{n-1}+c^{n-2}+\ldots+f}{a'x^p+b'x^{p-1}+c'x^{p-2}+\ldots+f'}=\frac{(x^n)\left(a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}+\ldots+\frac{f}{x^n}\right)}{(x^p)\left(a'+\frac{b'}{x}+\frac{c'}{x^2}+\ldots+\frac{f'}{x^p}\right)}$$

$$=(x^{n-p})\times\frac{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}+\ldots+\frac{f}{x^n}}{a'+\frac{b'}{x}+\frac{c'}{x^2}+\ldots+\frac{f'}{x^p}}\quad \text{avec } n\in\mathbb{N} \text{ et } p\in\mathbb{N}$$

Or, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}+\ldots+\frac{f}{x^n}\right)=a$ et $\lim\limits_{x\to\infty}\left(a'+\frac{b'}{x}+\frac{c'}{x^2}+\ldots+\frac{f'}{x^p}\right)=a'$

Donc, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}+\ldots+\frac{f}{x^n}}{a'+\frac{b'}{x}+\frac{c'}{x^2}+\ldots+\frac{f'}{x^p}}\right)=\dfrac{a}{a'}$

On distingue alors ***3 cas*** :

1^er^ cas : $n<p$

$\lim\limits_{x\to\infty}(x^{n-p})=0$ donc $\lim\limits_{x\to\infty}\boldsymbol{f(x)}=0\times\dfrac{a}{a'}=\mathbf{0}$

2^ème^ cas : $n=p$

$\lim\limits_{x\to\infty}(x^{n-p})=1$ donc $\lim\limits_{x\to\infty}\boldsymbol{f(x)}=1\times\dfrac{a}{a'}=\dfrac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a'}}$

3^ème^ cas : $n>p$

$\lim\limits_{x\to\infty}(x^{n-p})=\pm\infty$ donc $\lim\limits_{x\to\infty}\boldsymbol{f(x)}=\pm\infty$

exemples : a) $f(x)=\dfrac{2x+3}{-3x^2+4x-5}$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x}{-3x^2}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{2}{3x}\right)=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x}{-3x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{2}{3x}\right)=0$$

b) $g(x)=\dfrac{7x^4-x^3+3x^2+1}{3x^2-2x+4}$

$$\lim_{x\to-\infty}g(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{7x^4}{-3x^2}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{7}{3}x^2\right)=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{7x^4}{-3x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{7}{3}x^2\right)=-\infty$$

c) $h(x)=\dfrac{-3x^2+5x-1}{5x^2-3x+4}$

$$\lim_{x\to-\infty}h(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-3x^2}{5x^2}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{3}{5}\right)=-\frac{3}{5}$$

$$\lim_{x\to+\infty}h(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-3x^2}{5x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{3}{5}\right)=-\frac{3}{5}$$

II) Limites en a (avec $a \in \mathbb{R}$)

1) Cas où $a \in \mathcal{D}_f$

Théorème : La limite "en a" d'une fonction numérique quelconque f est l'image de a par f

Soit en *notation mathématique* :

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = f(a) = b}$$

exemples : a) $f(x) = -3x^2+3x-5$ $\quad \mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ donc $2 \in \mathcal{D}_f$ donc $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2) = -11$

b) $g(x) = \dfrac{-2x+4}{5x^2+1}$ $\quad \mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ donc $1 \in \mathcal{D}_f$ donc $\lim_{x \to 1} g(x) = g(1) = \dfrac{1}{3}$

c) $h(x) = \dfrac{4x-3}{x^2+x-6}$ $\quad \mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-3\,;2\}$ donc $0 \in \mathcal{D}_f$ donc $\lim_{x \to 0} h(x) = h(0) = \dfrac{1}{2}$

2) Cas où a est une "*valeur interdite*"

Théorème : Si a est une "valeur interdite" pour f alors :

on calcule les 2 limites : $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$

en utilisant les "***opérations sur les limites***" suivantes

Propriétés : "*Opérations sur les limites*"

a) Limite de $k \times f$ (où k est un réel donné)

$\lim f$	L	$+\infty$	$-\infty$
$\lim k \times f$ (avec $k > 0$)	k L	$+\infty$	$-\infty$
$\lim k \times f$ (avec $k < 0$)	k L	$-\infty$	$+\infty$

b) Limite de $f+g$

$\lim f$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim g$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim (f+g)$	L + L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?

c) Limite de $f.g$

$\lim f$	L	$L > 0$	$L > 0$	$L < 0$	$L < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim g$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim (f.g)$	L $\times$L'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?

d) Limite de $\dfrac{f}{g}$

Cas où la limite de g n'est pas nulle — Cas où la limite de g est nulle

$\lim f$	L	L	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$L > 0$ ou $+\infty$	$L > 0$ ou $+\infty$	$L < 0$ ou $-\infty$	$L < 0$ ou $-\infty$	0
$\lim g$	L'	$+\infty$ ou $-\infty$	$L' > 0$	$L' < 0$	$L' > 0$	$L' < 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0 à valeur positive	0 à valeur négative	0 à valeur positive	0 à valeur négative	0
$\lim \dfrac{f}{g}$	$\dfrac{L}{L'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?

Rque : les cases "***en jaunes***" correspondent aux "***formes indéterminées***"

III) Les Asymptotes

1) Les asymptotes verticales

Définition : Si $\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \pm\infty}$ et/ou si $\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \pm\infty}$

Alors on dit que la droite (Δ) d'équation $x = a$ est asymptote verticale à $\mathscr{C}_f$.

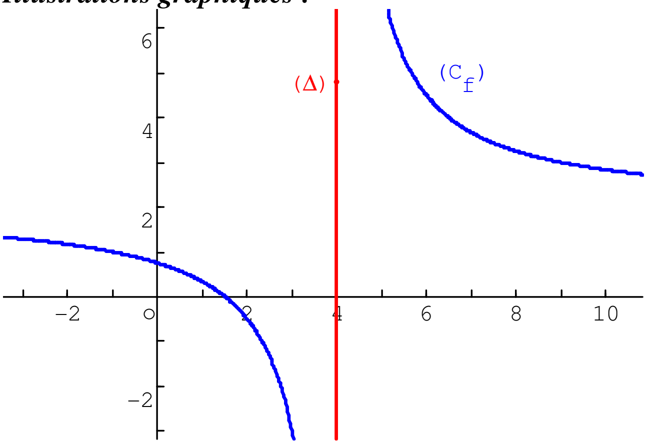
exemples : a) $f(x) = \dfrac{2x-3}{x-4}$. On a : $\lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ x < 4}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ x > 4}} f(x) = +\infty$ (le verifier !...)

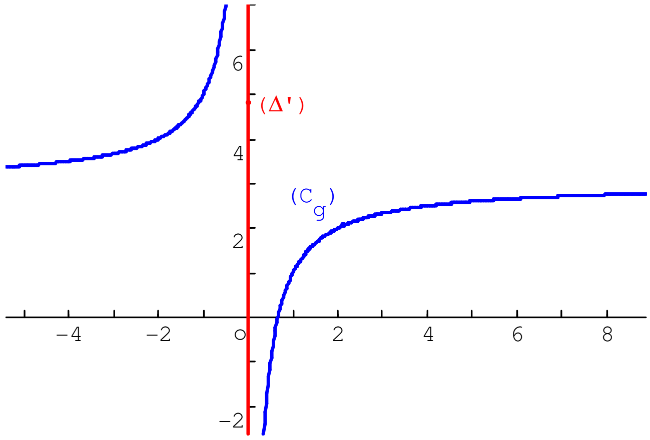
Donc, la droite (Δ) d'équation $x = 4$ est asymptote verticale à $\mathscr{C}_f$.

b) $g(x) = 3 - \dfrac{2}{x}$. On a : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty$ (le verifier !...)

Donc, la droite (Δ') d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à $\mathscr{C}_g$.

Illustrations graphiques :





2) Les asymptotes horizontales

Définition : Si $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b}$ (*resp.* Si $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b'}$)

Alors on dit que la droite (D) d'équation $y = b$ est asymptote horizontale à $\mathscr{C}_f$, en $-\infty$

(*resp.* selon la cas la droite (D') d'équation $y = b'$ est asymptote horizontale à $\mathscr{C}_f$, en $+\infty$)

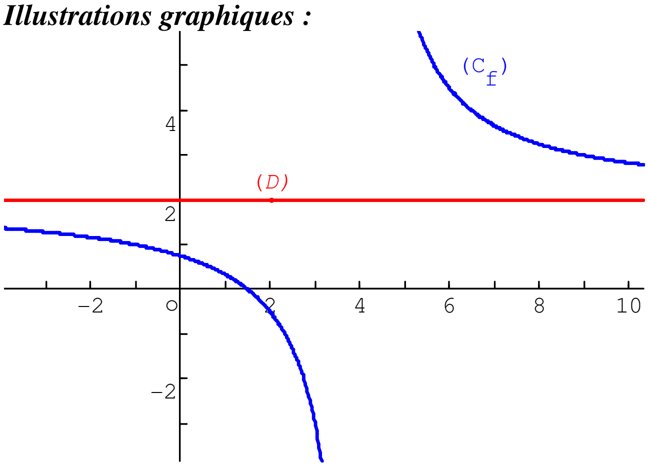
exemples : a) $f(x) = \dfrac{2x-3}{x-4}$. On a : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$ (le verifier !...)

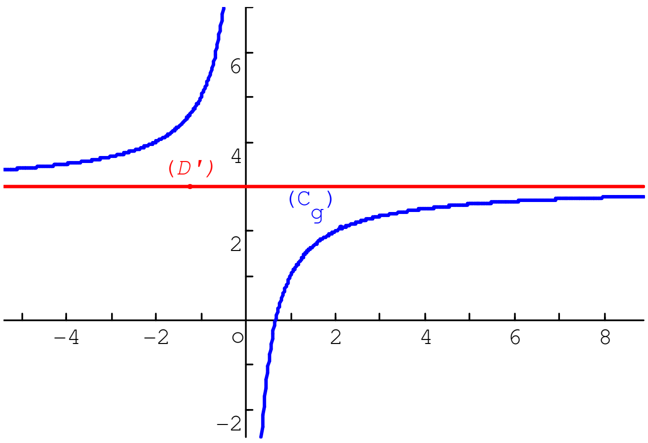
Donc, la droite (D) d'équation $y = 2$ est asymptote horizontale à $\mathscr{C}_f$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

b) $g(x) = 3 - \dfrac{2}{x}$. On a : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$ (le verifier !...)

Donc, la droite (D') d'équation $y = 3$ est asymptote horizontale à $\mathscr{C}_g$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

Illustrations graphiques :





3) Les asymptotes obliques

Définition : Si $\boxed{\lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - (ax+b)) = \mathbf{0}}$

Alors, on dit que la droite (D) d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à $\mathscr{C}_f$ en $-\infty$ et/ou en $+\infty$.

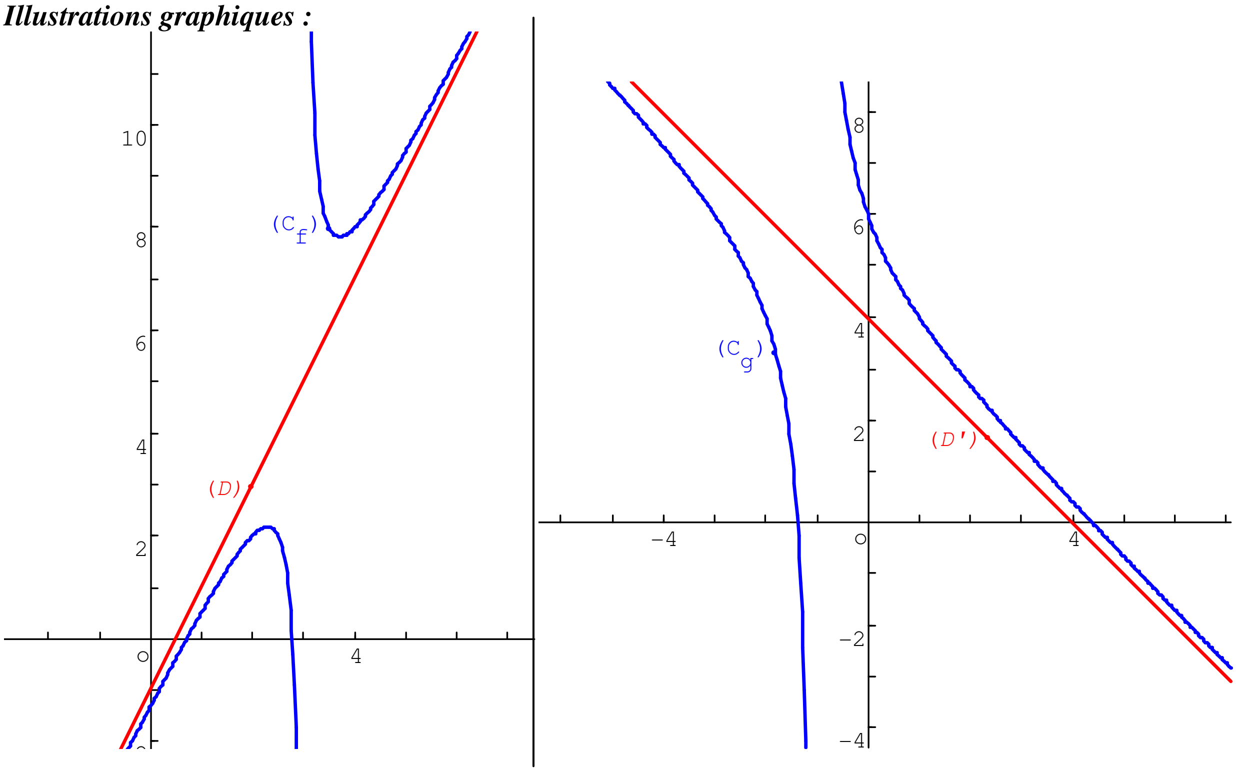
exemples : a) $f(x) = 2x - 1 + \dfrac{1}{x-3}$. On a : $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - (2x-1)) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - (2x-1)) = 0$

Donc, la droite (D) d'équation $y = 2x - 1$ est asymptote oblique à $\mathscr{C}_f$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

b) $g(x) = \dfrac{-x^2+3x+6}{x+1}$. On a : $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - (-x+4)) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - (-x+4)) = 0$

Donc, la droite (D') d'équation $y = -x + 4$ est asymptote oblique à $\mathscr{C}_g$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

Illustrations graphiques :



IV) Limites & Asymptotes des autres fonctions

1) Les fonctions irrationnelles

exemples : a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 2}$

Montrer que la droite (D) d'équation $y = x - 1$ est asymptote oblique à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$
et que la droite (D') d'équation $y = -x + 1$est asymptote oblique à $\mathscr{C}_f$ en $-\infty$

b) $f(x) = \dfrac{-x+2}{\sqrt{x^2-1}}$

Montrer que les droite (Δ) et (Δ') d'équation $x = -1$ et $x = 1$ sont 2 asymptotes verticales à $\mathscr{C}_f$
et que les droite (D) et (D') d'équation $y = -1$ et $y = 1$ sont 2 asymptotes horizontales à $\mathscr{C}_f$ en $\pm\infty$

2) Les asymptotes trigonométriques (ou circulaires)

exemples : a) $f(x) = 3\cos(2x+1) - 2\sin(-x+2)$ (Effectué en classe …)

b) $f(x) = \dfrac{4\cos(-3x+1)}{\cos(x-2)}$ (Effectué en classe …)