Chapitre 4 : Logarithme népérien

I. La fonction logarithme népérien

a) Définition

Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{x}$.

Cette fonction est continue sur $]0 ; +\infty[$ et admet alors des primitives sur $]0 ; +\infty[$.

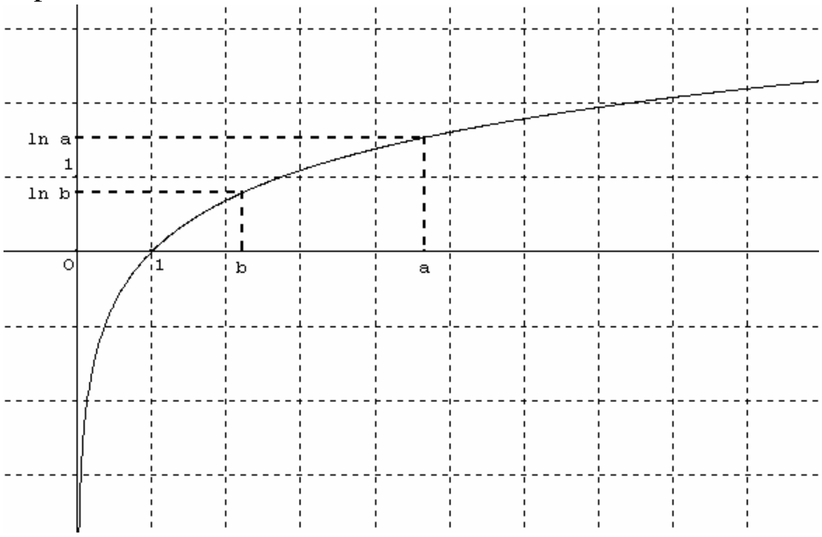
Définition : La fonction logarithme népérien, notée ln, est l'unique primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ définie sur $]0 ; +\infty[$ et qui s'annule en 1.

b) Conséquences

- **$\ln 1 = 0$**
- La fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et pour tout $x > 0$, $\mathbf{\ln'(x) = \frac{1}{x}}$.
- Pour tout $x > 0$, $\frac{1}{x} > 0$, donc la fonction **ln est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$.**

c) Sens de variation et équations, inéquations

- courbe représentative de la fonction ln :



Propriété : Pour tous réels a et b strictement positifs,
- **$\ln a > \ln b$ équivaut à $a > b$**
- **$\ln a = \ln b$ équivaut à $a = b$**

Conséquences : Pour tout réel x strictement positif :
- $\ln x = 0$ équivaut à $x = 1$
- $\ln x < 0$ équivaut à $0 < x < 1$
- $\ln x > 0$ équivaut à $x > 1$

Applications : Résolution d'équations et d'inéquations

- **Méthode :** pour résoudre une équation du type $\ln u(x) = \ln v(x)$ (respectivement une inéquation du type $\ln u(x) \geq \ln v(x)$) :

- on détermine l'ensemble des réels x tels que $u(x) > 0$ et $v(x) > 0$ (dans ce cas l'équation est bien définie) ;
- on résout dans cet ensemble l'équation $u(x) = v(x)$ (respectivement l'inéquation $u(x) \geq v(x)$).

- **Résoudre l'équation : $\ln(x^2 - 4) = \ln(3x)$.**

- on cherche les nombres x tels que $x^2 - 4 > 0$ et $3x > 0$.

Or $x^2 - 4 > 0$ lorsque $x \in]-\infty ; -2[\cup]2 ; +\infty[$ et $3x > 0$ lorsque $x > 0$.
L'équation sera alors résolue dans l'ensemble $E =]2 ; +\infty[$.

- de plus $x^2 - 4 = 3x$ signifie $x^2 - 3x - 4 = 0$.
On trouve $\Delta = 25$ et les solutions sont $x_1 = -1$ et $x_2 = 4$. Or $4 \in E$ et $-1 \notin E$,
donc la seule solution de l'équation $\ln(x^2 - 4) = \ln(3x)$ est 4.

- **Résoudre l'inéquation : $\ln(2x + 4) \geq \ln(6 - 2x)$.**

On cherche les réels x tels que $2x + 4 > 0$ et $6 - 2x > 0$, c'est à dire tels que $x > -2$ et $x < 3$.
L'inéquation doit alors être résolue dans l'ensemble : $E =]-2\ ;\ 3[$.
De plus, $2x + 4 \geq 6 - 2x$ équivaut à $x \geq \frac{1}{2}$. L'ensemble des solutions est alors : $]-2\ ;\ 3[\cap [\frac{1}{2}\ ;\ +\infty[$,
c'est à dire $[\frac{1}{2}\ ;\ 3[$.

- **Résoudre l'équation : $\ln(2x - 4) = 0$**

$\ln(2x - 4) = 0$ équivaut à $2x - 4 = 1$, c'est à dire $x = \frac{5}{2}$. La seule solution de l'équation est donc $\frac{5}{2}$.

- **Résoudre l'inéquation : $\ln(x - 10) < 0$**

$\ln(x - 10) < 0$ équivaut à $0 < x - 10 < 1$, c'est à dire : $10 < x < 11$.
L'ensemble des solutions est alors : $]10\ ;\ 11[$.

II. Propriétés algébriques

Propriété : Pour tous réels a et b strictement positifs, $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$

Remarque : Cette propriété se généralise au cas d'un produit de trois, quatre, … facteurs.

Propriétés : Pour tous réels a et b strictement positifs :

- $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b)$
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
- pour tout $n \in \Omega$, $\ln(a^n) = n \ln(a)$
- $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$

Exercice : Simplifier chacune des expressions suivantes :

$A = \ln 8 + \ln 10 + \ln \frac{1}{40}$ $\qquad$ $B = \ln 3x - \ln 3$ $\qquad$ $C = \ln \frac{3}{4} + \ln \frac{8}{3} - \ln 2^3$

$D = \ln 7^{-3} + 2 \ln 49$ $\qquad$ $E = 4 \ln 25 - 2 \ln \sqrt{5}$

III. Etude de la fonction ln

Nous avons déjà vu que la fonction ln est dérivable et strictement croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$.

a) limite en $+\infty$ et en 0

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$.
- $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$

Conséquence : **L'axe des ordonnées est asymptote verticale à la courbe représentant ln.**

Application : Etudier la limite en $+\infty$ de chacune des fonctions suivantes.
a) Pour tout réel $x > 3$, $f(x) = \ln(x^2 - 3x + 1)$.
b) Pour tous réels $x > -\frac{1}{2}$, $g(x) = \ln(2x + 1) - \ln(x + 3)$.

a) f est la composée de deux fonctions : $f(x) = u \circ v(x)$ où $v(x) = x^2 - 3x + 1$ et $u(x) = \ln x$
$\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 - 3x + 1 = \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

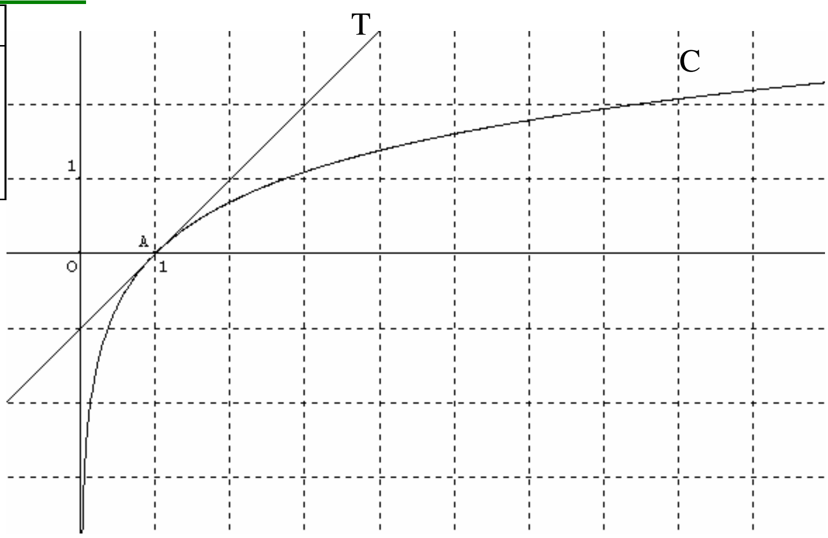
b) $g(x) = \ln(2x + 1) - \ln(x + 3) = \ln\left(\frac{2x + 1}{x + 3}\right)$.

g est la composée de deux fonctions : $g(x) = u \circ v(x)$ où $v(x) = \dfrac{2x+1}{x+3}$ et $u(x) = \ln x$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x+1}{x+3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{x} = \lim_{x \to +\infty} 2 = 2 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 2} \ln x = \ln 2 \quad \text{donc} \quad \lim_{x \to +\infty} g(x) = \ln 2.$$

b) Tableau de variation de la fonction ln

x	0	$+\infty$
ln	$-\infty$ ↗	$+\infty$



T est la tangente à la courbe C représentative de la fonction ln au point A d'abscisse 1.
Une équation de T est : $\boldsymbol{y = x - 1}$
La courbe C est en-dessous de T sur $]0 ; +\infty[$, donc pour tout $x > 0$, $\ln x \leq x - 1$.

c) limite en $+\infty$ de $\dfrac{\ln x}{x}$

Propriété : $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

Démonstration : f est la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \ln x - 2\sqrt{x}$.

f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$, et pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}} = \dfrac{1 - \sqrt{x}}{x}$

Sur $]0 ; +\infty[$, $f'(x)$ est du signe de $1 - \sqrt{x}$.
Le tableau de variation permet d'affirmer que, pour tout $x > 0$, $f(x) < 0$, c'est à dire $\ln x < 2\sqrt{x}$,
d'où $\dfrac{\ln x}{x} < \dfrac{2}{\sqrt{x}}$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f		↗	-2	↘	

Or pour tout $x \geq 1$, $0 \leq \dfrac{\ln x}{x} < \dfrac{2}{\sqrt{x}}$ et $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$. Donc $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

IV. L'équation $\ln x = m$

a) équation $\ln x = m$

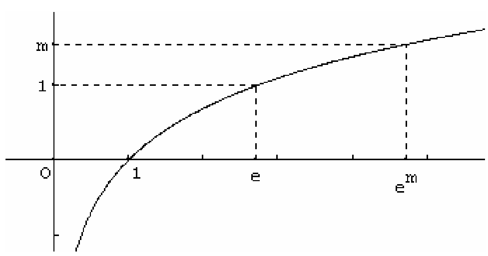
D'après le tableau de variation de la fonction ln, on déduit :

Propriété : Pour tout réel m, l'équation $\boldsymbol{\ln x = m}$ admet une **unique solution** dans $]0 ; +\infty[$.

En particulier, pour $m = 1$, la propriété précédente permet d'affirmer qu'il existe un seul réel dans $]0 ; +\infty[$, tel que $\ln x = 1$. Ce réel est noté **e**. On obtient **e ≈ 2,718.**

b) Le nombre e^m pour un réel m quelconque

Pour tout entier relatif n, $\ln(e^n) = n$.
En effet : $\ln(e^n) = n \times \ln(e) = n \times 1 = n$.



De façon plus générale, même lorsque m n'est pas un entier, **on note $\boldsymbol{e^m}$ la seule solution de l'équation $\boldsymbol{\ln x = m}$**.

Applications :

a) **Résoudre l'équation : $\boldsymbol{\ln(2x - 1) = -5}$**

Cela équivaut à résoudre : $2x - 1 = e^{-5}$. On obtient : $x = \dfrac{e^{-5} + 1}{2}$. La seule solution est alors $\dfrac{e^{-5} + 1}{2}$.

b) **Résoudre l'inéquation : $\ln(1 - 5x) > 1$.**

Cela équivaut à résoudre $\ln(1 - 5x) > \ln(e)$, c'est à dire $1 - 5x > e$, donc $x < \frac{1 - e}{5}$.

L'ensemble des solutions est alors $]-\infty ; \frac{1 - e}{5}[$.

c) **Résoudre l'inéquation : $\ln(x + 1) \leq 2$**

Cela revient à résoudre $\ln(x + 1) \leq \ln(e^2)$, c'est à dire $0 < x + 1 \leq e^2$. Donc $-1 < x \leq e^2 - 1$.
L'ensemble des solutions est alors : $]-1 ; e^2 - 1[$.

d) **Résoudre l'équation : $(\ln x)^2 - 3 \ln x - 4 = 0$.**

On pose $X = \ln x$ et on obtient l'équation : $X^2 - 3X - 4 = 0$ qui est une équation du second degré :
$\Delta = 25$. Les solutions sont alors : $X_1 = -1$ et $X_2 = 4$.
On résout alors les équations :
$\ln x = -1$ et on obtient : $x = e^{-1}$
$\ln x = 4$ et on obtient : $x = e^4$.
Les deux solutions de l'équation sont alors e^{-1} et e^4.

V. Fonction ln *u*

a) Dérivée de ln *u*

Propriété : Si u est une fonction dérivable et **strictement positive sur un intervalle I**, alors la fonction $\ln u$ est dérivable sur I et : $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$.

Exemples :

- f est la fonction définie sur 3 par $f(x) = \ln(x^2 + 1)$.

Le polynôme u définie par $u(x) = x^2 + 1$ est strictement positif et dérivable sur 3.

Donc f est dérivable sur 3 et $f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$.

- La fonction $g : x \mapsto \ln(2x - 1)$ est définie pour $2x - 1 > 0$, c'est à dire pour $x > \frac{1}{2}$.

Alors g est dérivable sur $]\frac{1}{2} ; +\infty[$, et pour tout $x \in]\frac{1}{2} ; +\infty[$, $g'(x) = \frac{2}{2x - 1}$.

b) Primitive de $\frac{u'}{u}$

Propriété : u est une fonction dérivable sur un intervalle I, **ne s'annulant pas sur I**. Alors, une primitive sur I de la fonction $\frac{u'}{u}$ est la fonction :

- $x \mapsto \ln(u(x))$ si $u(x) > 0$ sur I ;
- $x \mapsto \ln(u(x))$ si $u(x) < 0$ sur I.

Exemples :

- Sur l'intervalle $]-\infty ; 0[$, x est strictement négative.

Une primitive sur $]-\infty ; 0[$de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est donc la fonction $x \mapsto \ln(-x)$

- La fonction $f : x \mapsto \frac{4x^3}{x^4 + 2}$ se présente sous la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u(x) = x^4 + 2$. Or pour tout x de 3,

$x^4 + 2 > 0$. Donc une primitive de f sur 3 est la fonction : $x \mapsto \ln(x^4 + 2)$.

VI. La fonction logarithme décimal

Définition : La fonction **logarithme décimal**, notée **log**, est la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$

par : $\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$.

Ainsi $\log(1) = 0$, $\log(10) = 1$.

Remarque : Pour tout entier n, $\log(10^n) = n$.