LE PRODUIT SCALAIRE (Dans le Plan)

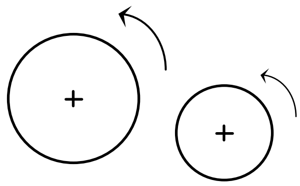
I) ANGLES ORIENTES DE VECTEURS

1) Orientation du plan

Définition :

Orienter un cercle, c'est choisir un sens de parcours sur ce cercle appelé **sens direct** (ou positif) .
L'autre sens est appelé **sens indirect** (négatif ou rétrograde)

Orienter le plan, c'est orienter tous les cercles du plan dans le même sens.
L'usage est de choisir pour sens direct le sens contraire des aiguilles d'une montre.
(appelé aussi **sens trigonométrique**)



Dans la suite du chapitre, on suppose que:

- *le plan* est orienté dans le **sens trigonométrique**.
- *Les angles* sont mesurés en **RADIANS**

2) Mesure d'un angle orienté de vecteurs

Définition :

Une seule des mesures de l'angle orienté de vecteurs ($\vec{u}$, $\vec{v}$) appartient à l'intervalle] -π ; π] ;
On l'appelle **mesure principale** de l'angle orienté de vecteurs ($\vec{u}$, $\vec{v}$) .

Rem :

- La notation usuelle est $\widehat{(\vec{u},\vec{v})}$, mais s'il n'y a aucun risque de confusion , on notera seulement ($\vec{u}$, $\vec{v}$) cet angle orienté.
- Par abus de langage, on confond un angle et ses mesures.
  On écrit, par exemple, $(\vec{u},\vec{v}) = \frac{\pi}{2}$ signifiant qu'**une** mesure de ($\vec{u}$, $\vec{v}$) est $\frac{\pi}{2}$;

  les autres mesures sont alors de la forme $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

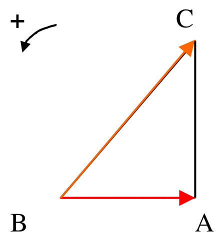
  On écrit aussi $(\vec{u},\vec{v}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ **ou encore** $(\vec{u},\vec{v}) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$
- La valeur absolue de la mesure principale de l'angle orienté de vecteurs ($\vec{u}$, $\vec{v}$) est la mesure de l'angle géométrique formé par ces deux vecteurs.

Ex :

La mesure principale de ($\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$) est $\frac{\pi}{3}$.

La mesure principale de ($\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$) est $-\frac{\pi}{6}$ et $\widehat{ACB} = \frac{\pi}{6}$

La mesure principale de ($\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$) est $-\frac{\pi}{2}$ et $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{2}$



$\widehat{ABC} = \frac{\pi}{3}$

3) Mesures particulières

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan orienté.

- Dire que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires revient à dire que :

Angle nul : la mesure principale de ($\vec{u}$, $\vec{v}$) est égale à 0 (*$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de même sens*)

ou

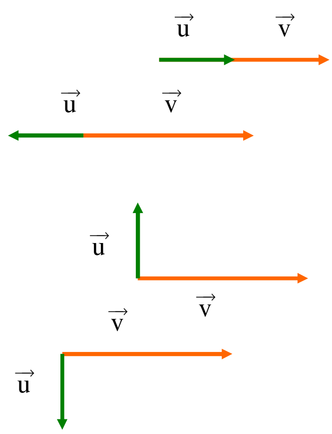
Angle plat : la mesure principale de ($\vec{u}$, $\vec{v}$) est égale à π (*$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de sens contraire*)

- Dire que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux revient à dire que :

Angle droit direct : la mesure principale de ($\vec{u}$, $\vec{v}$) est égale à $\frac{\pi}{2}$

ou

Angle droit indirect : la mesure principale de ($\vec{u}$, $\vec{v}$) est égale à $-\frac{\pi}{2}$



II) PRODUIT SCALAIRE (dans le plan)

1) Définitions

Notation :

Le produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ noté $\vec{u}\,.\,\vec{v}$ est le nombre défini par l'une ou l'autre des égalités ci-dessous :

Définition n°1: *avec l'angle et la norme de vecteurs…*

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ 2 vecteurs non nuls du plan .

Alors : $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\cos(\vec{u},\vec{v})$

A retenir :

Le produit scalaire de deux vecteurs est égal au produit de leurs normes par le cosinus de l'angle qu'ils forment.

Définition n°2: *avec les coordonnées…*

Dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ alors , on a : $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$

Définition n°3: *avec un triangle ou un parallélogramme…*

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ 2 vecteurs non nuls du plan .

Alors : $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$ *si on connaît les 3 côtés d'un triangle…*

$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$ *si on connaît les 3 côtés d'un triangle…*

$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{4}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$ *si on connaît les diagonales d'un parallélogramme…*

Définition n°4:

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ 2 vecteurs non nuls du plan . Soit $\vec{v}'$ le projeté orthogonal de $\vec{v}$ sur $\vec{u}$. Alors on a : $\vec{u}.\vec{v} = \vec{u}.\,\overrightarrow{v'}$

Rques :

- Si $\vec{u} = \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$ alors $\vec{u}.\vec{v} = 0$
- Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} = \vec{0}$ alors $\vec{u}.\vec{v} = 0$
- Si $\vec{u} = \vec{0}$ et $\vec{v} = \vec{0}$ alors $\vec{u}.\vec{v} = 0$

Exemple 1 :

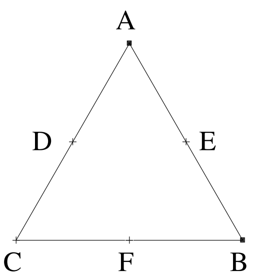
Soit A (2 ; 3) , B (-1 ; 4) et C (-2 ; 1) trois points du plan muni d'un repère orthonormal.

On a $\overrightarrow{AB}\,(-3\,;1)$ et $\overrightarrow{BC}\,(-1\,;-3)$ d'où $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = (-3)\times(-1) + (-3)\times 1 = 0$

Exemple 2 :

Soit ABC un triangle équilatéral tel que AB = 3 (dans l'unité de longueur (
Les points E, F et D sont les milieux des côtés.
On a alors :

- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \cos(\widehat{BAC}) = 3 \times 3 \times \cos\frac{\pi}{3} = \frac{9}{2}$
- **ou** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AE = 3 \times \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$
- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CE} = AB\,.\,CE \times \cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CE}) = AB \times CE \times \cos\frac{\pi}{2} = 0$
- **ou** le projeté orthogonal de $\overrightarrow{CE}$ sur $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur nul , donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CE} = 0$



2) Propriétés

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs du plan et k un réel, on a :

Symétrie

$\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$

Linéarité

$\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$ et $(\vec{u}+\vec{v}).\vec{w} = \vec{u}.\vec{w} + \vec{v}.\vec{w}$

$(k\vec{u}).\vec{v} = k\,\vec{u}.\vec{v}$ *et* $\vec{u}.(k\vec{v}) = k\,\vec{u}.\vec{v}$

Signe

$\vec{u}.\vec{v}$ est du signe de $\cos(\vec{u},\vec{v})$

conséquence :

$(a\vec{u}).(b\vec{u}) = ab\,\vec{u}.\vec{v}$

(où a et b sont deux réels quelconques)

Preuve :

On se place dans un repère orthonormé (utile pour la preuve seulement) et on note (x ; y) , (x' ; y') et (x'' ; y'') les coordonnées respectives de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

Montrons l'égalité $\vec{u}\,.\,(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\,.\,\vec{v} + \vec{u}\,.\,\vec{w}$; *les autres égalités se montrent de la même façon .*

$\vec{v}+\vec{w}$ a pour coordonnées (x' + x'' ; y' + y'') .

Donc

$\vec{u}\,.\,(\vec{v}+\vec{w}) = x\,(x'+x'') + y\,(y'+y'') = x\,x' + x\,x'' + y\,y' + y\,y'' = (x\,x' + y\,y') + (x\,x'' + y\,y'') = \vec{u}\,.\,\vec{v} + \vec{u}\,.\,\vec{w}$

Exemple :

- $(3\vec{u} - 2\vec{v})\,.\,(2\vec{u}+\vec{v}) =$
- Expliquer pourquoi les écritures suivantes n'ont pas de sens :
  - « $\vec{u}\,.\,\vec{v}\,.\,\vec{w}$ » :
  - « $\vec{u}\,.\,\vec{v} + \vec{w}$ » :
  - « $\vec{u}\,.\,(k+\vec{v})$ » :

Rem :

Il y a des ressemblances évidentes entre les règles de calcul du produit scalaire et celles sur les réels, mais **attention** il ne faut pas généraliser :
En effet, on peut avoir $\vec{u}\,.\,\vec{v} = 0$ avec $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$.
D'autre part $\vec{u}\,.\,\vec{v} = \vec{u}\,.\,\vec{w}$ n'implique pas $\vec{v} = \vec{w}$.

3) Carré scalaire et norme

Définition :

Pour tout vecteur $\vec{u}$ du plan, le produit scalaire de $\vec{u}$ par lui même, $\vec{u}\,.\,\vec{u}$ est appelé **carré scalaire** de $\vec{u}$. On le note $\vec{u}^{\,2}$
On a :

$$\vec{u}^{\,2} = \vec{u}\,.\,\vec{u} = \|\vec{u}\|\,.\,\|\vec{u}\| = \|\vec{u}\|^2$$

Ce qui donne, pour deux points A et B : $\overrightarrow{AB}^{\,2} = \|\overrightarrow{AB}\|^2 = AB^2$

Rem :

- $\vec{u}$ est unitaire si et seulement si $\vec{u}^{\,2} = 1$
- Après quelques calculs, on retrouve **des produits scalaires remarquables** (bien familiers)

$(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^{\,2} + \vec{v}^{\,2} + 2\,\vec{u}\,.\,\vec{v}$, $(\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^{\,2} + \vec{v}^{\,2} - 2\,\vec{u}\,.\,\vec{v}$ et $(\vec{u}+\vec{v})\,(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}^{\,2} - \vec{v}^{\,2}$

2) Produit scalaire et orthogonalité

Théorème :

Dans un repère orthonormé, on considère les deux vecteurs $\vec{u}$ (x ; y) et $\vec{v}$ (x' ; y') .

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si **leur produit scalaire est nul**

$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}\,.\,\vec{v} = 0$

Preuve :

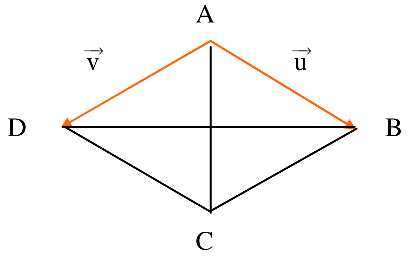
- Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, le résultat est évident.
- Supposons $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$.
  On a $\vec{u}\,.\,\vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos(\vec{u},\vec{v})$
  Or $\|\vec{u}\| \neq 0$ et $\|\vec{v}\| \neq 0$, ainsi : $\vec{u}\,.\,\vec{v} = 0 \Leftrightarrow \cos(\vec{u},\vec{v}) = 0 \Leftrightarrow (\vec{u},\vec{v}) = \frac{\pi}{2} + k\,\pi$ (où $k \in \mathbb{Z}$) $\Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$

Rem :

- Le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur du plan.
- On ne modifie pas le produit scalaire de deux vecteurs en ajoutant à l'un d'eux un vecteur orthogonal à l'autre.
  $\vec{u}\,.\,(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\,.\,\vec{v} + \vec{u}\,.\,\vec{w}$ et $\vec{u}\,.\,\vec{w} = 0$ …

- Dans un repère orthonormal, le produit scalaire de $\vec{u}\,(x\,,\,y)$ et $\vec{v}\,(x'\,,\,y')$ est $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$
  On en déduit que :
  $$\vec{u} \perp \vec{v} \iff x\,x' + y\,y' = 0$$

Ex :
Soit ABCD un parallélogramme.
En posant $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AD} = \vec{v}$, on retrouve que ABCD est un losange si et seulement si ses diagonales sont perpendiculaires .



En effet $(\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2$

Ainsi $||\vec{u}|| = ||\vec{v}||$ si et seulement si les vecteurs $\vec{u} + \vec{v}$ et $\vec{u} - \vec{v}$ sont orthogonaux .

III) APPLICATIONS DU PRODUIT SCALAIRE

1) Relations métriques dans le triangle

a) Théorème d'Al-Kashi

Soit ABC un triangle quelconque. L'usage est de noter :

- $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$
- S l'aire du triangle
- $\hat{A} = \widehat{BAC}$, $\hat{B} = \widehat{CBA}$, $\hat{C} = \widehat{BCA}$

Théorème :

On a : $\mathbf{a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc\cos\hat{A}}$

Ce théorème est aussi appelé théorème de Pythagore généralisé …

Preuve :

On a $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$
Ainsi $a^2 = (\overrightarrow{BC})^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = AC^2 + AB^2 - 2\,\overrightarrow{AC}\,.\,\overrightarrow{AB} = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos\hat{A}$

Rem :

- De la même façon, on montre que : $b^2 = a^2 + c^2 - 2\,a\,c\cos\hat{B}$ et $c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos\hat{C}$
- Si le triangle est rectangle en A , alors $\hat{A} = \frac{\pi}{2}$, $\cos\hat{A} = 0$ et … $a^2 = b^2 + c^2$ *(On retrouve le théorème de Pythagore)*

b) Le théorème de la médiane

Théorème :

Soit I le milieu de [BC]. On a : $$\mathbf{AB^2 + AC^2 = 2\,AI^2 + \frac{BC^2}{2}}$$

On a aussi :
$$\mathbf{\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = AI^2 - \frac{1}{4}BC^2}$$
et
$$\mathbf{AB^2 - AC^2 = 2\,\overrightarrow{IA}\,.\,\overrightarrow{BC}}$$

Preuve :

On a $AB^2 = (\overrightarrow{AB})^2 = (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB})^2 = AI^2 + IB^2 + 2\overrightarrow{AI}\,.\,\overrightarrow{IB}$
Et $AC^2 = (\overrightarrow{AC})^2 = (\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{IB})^2 = AI^2 + IB^2 - 2\overrightarrow{AI}\,.\,\overrightarrow{IB}$
En additionnant membres à membres on obtient :
$$AB^2 + AC^2 = 2\,AI^2 + 2\,IB^2 = 2\,AI^2 + \frac{BC^2}{2}$$

c) Aire d'un triangle

Théorème :

On a : $S = \frac{1}{2} b\, c \sin \widehat{A}$

Preuve :

L'aire du triangle ABC est donnée par $S = \frac{1}{2} AB \times CH$

Deux cas se présentent :

- si l'angle $\widehat{A}$ est aigu, $CH = AC \sin \widehat{A}$
- si l'angle $\widehat{A}$ est obtus, $CH = AC \sin \widehat{CAH}$

Or $\widehat{CAH} = \pi - \hat{A}$, donc $\sin \widehat{CAH} = \sin(\pi - \widehat{A}) = \sin \widehat{A}$

Dans les deux cas, on $S = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin \widehat{A} = \frac{1}{2} b\, c \sin \widehat{A}$

Rem :

De la même façon, on montre que $S = \frac{1}{2} a\, c \sin \widehat{B}$ et $S = \frac{1}{2} a\, b \sin \widehat{C}$

d) Formule des Sinus

Théorème :

On a : $\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}}$

Preuve :

On a $S = \frac{1}{2} b\, c \sin \widehat{A} = \frac{1}{2} a\, c \sin \widehat{B} = \frac{1}{2} a\, b \sin \widehat{C}$

En multipliant par $\frac{2}{abc}$, on obtient $\frac{2\,S}{abc} = \frac{\sin \widehat{A}}{a} = \frac{\sin \widehat{B}}{b} = \frac{\sin \widehat{C}}{c}$

En passant aux inverses (les sinus des angles d'un triangle sont différents de zéro), on obtient $\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}}$

2) Equations de droites

a) Equation réduite d'une droite

Théorème :

L'équation réduite d'une droite (d) est du type : $y = m.x + p$

Exemple : …

b) Equation cartésienne d'une droite

Théorème :

L'**équation cartésienne** d'une droite (d) est du type : $ax + by + c = 0$

Définition :

Un **vecteur normal** à une droite (d) est un vecteur non nul orthogonal à un vecteur directeur de d .

Théorème :

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé . Soit (d) la droite d'équation : $ax + by + c = 0$

- Un **vecteur directeur** de (d) est : $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$
- Un **vecteur normal** à (d) est : $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

Preuve :

- Soit $A(x_0 ; y_0)$ un point de d et $M(x ; y)$ un point du plan, alors :

$M \in d \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = 0$

On a $\vec{u}(a ; b)$ et $\overrightarrow{AM}(x - x_0 ; y - y_0)$

Ainsi $\quad M \in d \quad \Leftrightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$
$\Leftrightarrow a x + b y - (a x_0 + b y_0) = 0$
$\Leftrightarrow a x + b y + c = 0 \qquad$, en posant $c = -(a x_0 + b y_0)$

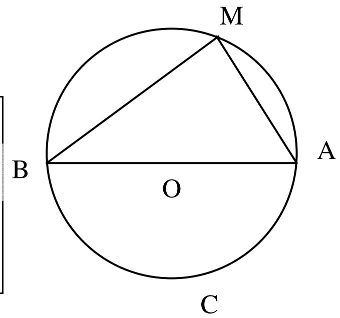
- Si la droite d a pour équation $a x + b y + c = 0$, alors le vecteur $\vec{v}(-b , a)$ est un vecteur directeur de d . (facile à montrer)
  Or $\vec{u} \cdot \vec{v} = a(-b) + b a = 0$
  Ainsi $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux et $\vec{u}$ est normal à d .

3) Équations d'un cercle

a) Equation réduite d'un cercle

Soit A un point du plan et r un réel positif .
Le cercle C de centre $A(x_0 ; y_0)$ et de rayon r est l'ensemble des points M du plan tels que $AM^2 = r^2$
Son équation réduite est : $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$

b) Equation cartésienne d'un cercle



Théorème :

Soit A et B deux points distincts du plan.
La cercle C de diamètre [AB] est l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.
Son équation cartésienne est du type : $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

Preuve :

Comme vous le savez depuis longtemps (! ! !) , le cercle C , privé des points A et B ,est l'ensemble des points M du plan tels que le triangle MAB est rectangle en M , c'est à dire l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.
D'autre part, si M = A ou M = B , alors $\overrightarrow{MA} = \vec{0}$ ou $\overrightarrow{MB} = \vec{0}$ et on a encore $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

Etude d'un exemple :

On se place dans un repère orthonormé :
Déterminons une équation du cercle C de diamètre [AB] avec $A(-1 ; 3)$ et $B(2 ; 2)$.
Soit $M(x ; y)$ un point du plan .
On a $\qquad M \in C \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$
Or $\overrightarrow{MA}(-1 - x ; 3 - y)$ et $\overrightarrow{MB}(2 - x ; 2 - y)$

Ainsi $M \in C \Leftrightarrow (-1 - x)(2 - x) + (3 - y)(2 - y) = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - x - 5y + 4 = 0$

Rem :

En développant $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ (trouvé en A)) on obtient une équation de la forme
$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$ (où a , b et c sont des réels) , mais réciproquement une équation de cette forme ne représente pas toujours un cercle .

Ex : $\qquad x^2 + y^2 - x - 3y + 3 = 0$
$\Leftrightarrow (x^2 - x) + (y^2 - 3y) + 3 = 0$
$\Leftrightarrow (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} + (y - \frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4} + 3 = 0$
$\Leftrightarrow (x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{3}{2})^2 = -\frac{1}{2}$
Ce qui est impossible ; l'ensemble des points vérifiant cette relation est donc l'ensemble vide .