Chapitre I : Révisions

I. Le second degré

a) fonction trinôme

La représentation graphique d'une fonction f définie sur ℝ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ (a non nul) est une **parabole**. La fonction f est appelée **fonction trinôme ou fonction polynôme du second degré**.

b) Equation du second degré

Lorsque l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet des solutions, celles-ci sont appelées racines du trinôme $ax^2 + bx + c$.

On appelle **discriminant** du trinôme $ax^2 + bx + c$ le nombre noté Δ tel que $\Delta = b^2 - 4ac$.

Attention : mettre les membres du trinôme dans le sens habituel pour éviter toute faute d'étourderie.

→ L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a :

- deux solutions si $\Delta > 0$, qui sont : $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Dans ce cas, on peut factoriser le trinôme : $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.
On a deux points d'intersection avec l'axe des abscisses.

- une seule solution si $\Delta = 0$, qui est : $-\dfrac{b}{2a}$.

On peut également factoriser le trinôme dans ce cas : $ax^2 + bx + c = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$.

On a un seul point d'intersection sur l'axe des abscisses.

- aucune solution si $\Delta < 0$.

Exercice 1: Dans chacun des cas, déterminer les racines du trinôme, puis, si c'est possible, factoriser ce trinôme.

a) $-6x^2 + 7x - 2$ b) $x^2 + 4x + 9$

solution :

a) $\Delta = 7^2 - 4 \times (-6) \times (-2) = 49 - 48 = 97$ $\Delta > 0$ donc le trinôme a deux racines qui sont :

$$x_1 = \frac{-7 - \sqrt{97}}{2 \times (-6)} = \frac{-7 - \sqrt{97}}{-12} = \frac{7 + \sqrt{97}}{12} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-7 + \sqrt{97}}{2 \times (-6)} = \frac{7 - \sqrt{97}}{12}$$

On en déduit : $-6x^2 + 7x - 2 = -6 \times (x - \dfrac{7 + \sqrt{97}}{12})(x - \dfrac{7 - \sqrt{97}}{12})$

b) $\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times 9 = 16 - 36 = -20$ $\Delta < 0$ donc le trinôme n'a pas de racine et on ne peut pas le factoriser.

Exercice 2 : Déterminer par le calcul les coordonnées du point d'intersection des paraboles d'équations : $y = x^2 - 7x + 3$ et $y = -x^2 + 2x - 1$.

solution : L'abscisse x du point d'intersection des deux parabole est la solution de l'équation :
$x^2 - 7x + 3 = -x^2 + 2x - 1$ qui est équivalente à $2x^2 - 9x + 4 = 0$.

$\Delta = (-9)^2 - 4 \times 2 \times 4 = 81 - 32 = 49$ d'où $\sqrt{\Delta} = 7$

Les solutions sont alors : $x_1 = \dfrac{-(-9) - \sqrt{49}}{2 \times 2} = \dfrac{9 - 7}{4} = \dfrac{1}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-(-9) + \sqrt{49}}{2 \times 2} = \dfrac{9 + 7}{4} = 4$.

Les coordonnées des points d'intersection des deux paraboles sont donc : $(\dfrac{1}{2} ; -\dfrac{1}{4})$ et $(4 ; -9)$.

c) Signe de $ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$

Δ est le discriminant du trinôme $P(x) = ax^2 + bx + c$:

- si $\Delta < 0$, alors $P(x)$ est du signe de a, pour tout x réel.
- si $\Delta = 0$, alors $P(x)$ est du signe de a, pour tout x réel sauf en $-\dfrac{b}{2a}$ où il s'annule.
- si $\Delta > 0$, alors $P(x)$ est du signe de a à l'extérieur des racines de P(x) et du signe de $-a$ entre les racines de $P(x)$.

Exercice 3 : Résoudre l'inéquation : $(x^2 - 3x + 1)(x^2 + 2x + 1) \geq 0$.
solution : Il suffit de déterminer le signe de chaque trinôme :
→ pour le premier, $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 9 - 4 = 5$

ses racines sont alors : $x_1 = \dfrac{-(-3) - \sqrt{5}}{2 \times 1} = \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-(-3) + \sqrt{5}}{2 \times 1} = \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}$

Le trinôme $x^2 - 3x + 1$ est donc strictement positif sur $]-\infty ; \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}[\cup]\dfrac{3 + \sqrt{5}}{2} ; +\infty[$ et

strictement négatif sur $]\dfrac{3 - \sqrt{5}}{2} ; \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}[$.

→ pour le deuxième, $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times 1 = 4 - 4 = 0$

il n'y a qu'une racine : $x_3 = \dfrac{-2}{2 \times 1} = -1$

Le trinôme $x^2 + 2x + 1$ est donc positif sur ℝ sauf en -1 où il s'annule.
On peut alors établir un tableau de signes :

x	$-\infty$		-1		$\frac{3-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{3+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
signe de $x^2 - 3x + 1$		+	|	+	0	–	0	+	
signe de $x^2 + 2x + 1$		+	0	+	|	+	|	+	
signe du produit		+	0	+	0	–	0	+	

L'ensemble solution de l'inéquation est donc $]-\infty ; \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}] \cup [\dfrac{3 + \sqrt{5}}{2} ; +\infty[$.

II. Limites et comportement asymptotique

a) Limites de fonctions usuelles

- $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$, $n \geq 1$
- $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{1}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$

et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$ $\quad \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \dfrac{1}{x} = -\infty$

b) opérations et limites

Dans tout ce paragraphe, α désigne un nombre réel, ou $+\infty$ ou $-\infty$, et ℓ et ℓ' désignent des nombres réels.

limite de la somme de deux fonctions

Si f a pour limite en α	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Si g a pour limite en α	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $f + g$ a pour limite en α	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?

Exemple : quelle est la limite en $+\infty$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x}$?

On sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$; donc d'après le tableau précédent, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

limite du produit de deux fonctions

Si f a pour limite en α	ℓ	$\ell > 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
Si g a pour limite en α	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
alors $f \times g$ a pour limite en α	$\ell\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?

remarque : limite en $+\infty$ de ax^n
On déduit du tableau que pour tout entier $n \geq 1$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$ et que,

si $a > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} (ax^n) = +\infty$ et si $a < 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} (ax^n) = -\infty$.

Exemples : $\lim\limits_{x \to 0} (x+1)\sqrt{x} = 0$ car $\lim\limits_{x \to 0} (x+1) = 1$ et $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x} = 0$.

Quelle est la limite en $-\infty$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = x^3\left(\frac{1}{x} - 2\right)$?

$\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{x} - 2\right) = -2$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$; donc d'après le tableau $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

limite du quotient de deux fonctions

→ cas où le dénominateur a une limite non nulle

Si f a pour limite en α	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
Si g a pour limite en α	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$\pm\infty$
alors $\frac{f}{g}$ a pour limite en α	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?

→ cas où le dénominateur a une limite nulle

Si f a pour limite en α	$\ell > 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell < 0$	0
Si g a pour limite en α	0 en restant positive	0 en restant négative	0 en restant positive	0 en restant négatif	0
alors $\frac{f}{g}$ a pour limite en α	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?

Exemples : • $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-3}{2x+1} = 0$ car si $f(x) = -3$ et $g(x) = 2x + 1$,

alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -3$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

• Etude de la limite en 1 de la fonction h définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $h(x) = \frac{x-2}{x-1}$.

$\lim\limits_{x \to 1} (x-2) = -1$ et $\lim\limits_{x \to 1} (x-1) = 0$.

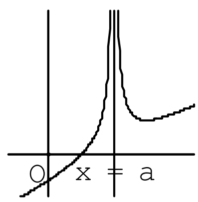
Pour conclure il est nécessaire de distinguer les cas $x > 1$ (limite à droite) et $x < 1$ (limite à gauche):
$x - 1 < 0$ si $x < 1$ et $x - 1 > 0$ si $x > 1$.

On conclut : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{x-2}{x-1} = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \frac{x-2}{x-1} = +\infty$.

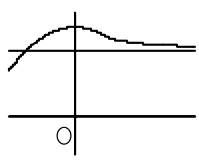
c) droites asymptotes à une courbe

f est une fonction définie sur un intervalle I, $\mathscr{C}$ est sa courbe représentative dans un repère orthogonal. a et m désignent des réels.

• Si f admet une limite infinie en a, alors la droite d'équation $x = a$ est une asymptote à $\mathscr{C}$ parallèle à l'axe des ordonnées.

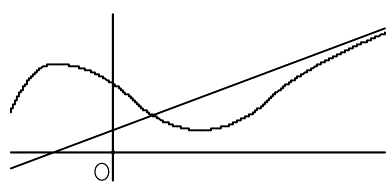


• Si f admet une limite finie m en $+\infty$ ou en $-\infty$, alors la droite d'équation $y = m$ est une asymptote à $\mathscr{C}$ parallèle à l'axe des abscisses.



• Une droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe représentative de f si $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$ ou si $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$.

La connaissance du signe de $f(x) - (ax+b)$ permet de préciser la position de la courbe représentative de la fonction et de la droite.



Exemple : Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ par $f(x) = 2x - 3 - \dfrac{4}{x}$

$f(x) - (2x - 3) = -\dfrac{4}{x}$; $\lim\limits_{x \to -\infty} -\dfrac{4}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} -\dfrac{4}{x} = 0$,

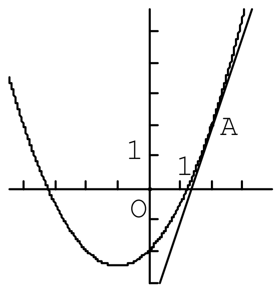
donc la droite d'équation $y = 2x - 3$ est asymptote oblique à la courbe représentative de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

III. Rappels sur les dérivées

a) nombre dérivé et tangente à une courbe

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I, a et $a + h$ sont deux éléments de I.
Dire que f est dérivable en a et que son nombre dérivé en a est $f'(a)$ signifie que :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a).$$



Définition : Si f est une fonction dérivable en a, alors la courbe $\mathscr{C}$ représentant f admet une tangente au point A d'abscisse a.
Cette tangente a pour équation : $y = \underbrace{f'(a)}_{\text{coefficient directeur}}(x - \underbrace{a}_{\text{abscisse de A}}) + \underbrace{f(a)}_{\text{ordonnée de A}}$

Définition de la fonction dérivée :
Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On dit que f est dérivable sur I lorsque f est dérivable en tout réel de I. Dans ce cas, la fonction définie sur I par $x \mapsto f'(x)$ est appelée fonction dérivée de f sur I et notée f'.

Formulaire :

$f(x)$	$f'(x)$	sur l'intervalle
k (constante réelle)	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
x^n ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$)	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0 ; +\infty[$

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I, k est un réel :

$(ku)' = ku'$
$(u + v)' = u' + v'$
$(uv)' = u'v + uv'$

Si de plus v ne s'annule pas sur I :

$\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$ et $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

Exemples : • Si $f(x) = 3x^5 - 2x^2 + 1$, $f'(x) = 3 \times 5x^4 - 2 \times 2x = 15x^4 - 4x$.

• g est la fonction définie sur $]3 ; +\infty[$ par $g(x) = 3x + \dfrac{2}{3 - x}$. Calculer $g'(x)$.

$g(x) = u(x) + 2 \times \dfrac{1}{v(x)}$ avec $u(x) = 3x$ et $v(x) = 3 - x$ d'où $g'(x) = u'(x) + 2 \times \dfrac{-v'(x)}{v(x)^2}$

$u'(x) = 3$ et $v'(x) = -1$ d'où $g'(x) = 3 + 2 \times \dfrac{1}{(3 - x)^2} = 3 + \dfrac{2}{(3 - x)^2}$.

application : Etudier la position d'une courbe par rapport à sa tangente :
Pour étudier la position de $\mathscr{C}$ (courbe représentative de la fonction f) par rapport à la droite T d'équation $y = ax + b$, on étudie le signe de la différence $f(x) - (ax + b)$.
→ Lorsque $f(x) - (ax + b) > 0$, $\mathscr{C}$ est au-dessus de T.
→ Lorsque $f(x) - (ax + b) < 0$, $\mathscr{C}$ est en-dessous de T.

Exemple : f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - x + 1$ et $\mathscr{C}$ est la courbe représentant f dans un repère orthogonal.
a) Déterminer une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 0.
b) Etudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à T.

solution :

a) f est dérivable sur ℝ et pour tout $x \in$ ℝ, $f'(x) = 3x^2 - 1$. T a pour équation $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$.
Or, $f'(0) = -1$ et $f(0) = 1$, donc T a pour équation $y = -x + 1$.

b) Etudions le signe de $f(x) - (-x + 1) = x^3$.
$x^3 > 0$ sur $]0 ; +\infty[$ et $x^3 < 0$ sur $]-\infty ; 0[$. Donc $\mathscr{C}$ est au-dessus de T sur $]0 ; +\infty[$ et en-dessous de T sur $]-\infty ; 0[$

b) Dérivation et étude d'une fonction

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

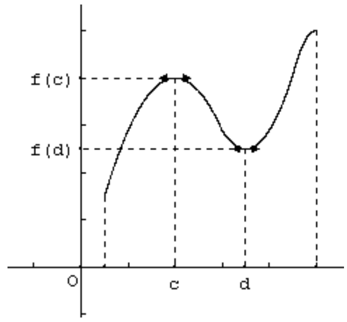
- Si $f' \geq 0$ (resp. $f' \leq 0$) sur I, alors f est **croissante** (resp. **décroissante**) sur I.
- Si $f' = 0$ sur I, alors f est **constante** sur I.
- De plus, si I = $[a ; b]$ et si $f' > 0$ (resp. $f' < 0$) sur **l'intervalle ouvert** $]a ; b[$, alors f est **strictement croissante** (resp. **strictement décroissante**) sur $[a ; b]$.

Extremum local et valeurs qui annulent la dérivée :

c est un nombre réel de l'ensemble de définition d'une fonction f.

Définition : Dire que $f(c)$ est un **maximum local** (resp. un **minimum local**) signifie que l'on peut trouver un intervalle ouvert I contenant c tel que :

pour tout x de I, $f(x) \leq f(c)$ [resp. $f(x) \geq f(c)$].



Théorème : f est un fonction dérivable sur un intervalle I ouvert et c est un réel de I.
Si f admet un extremum (minimum ou maximum) local en c, alors $f'(c) = 0$.
La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A(c ; $f(c)$) est alors horizontale.

remarque : Il peut arriver que $f'(c) = 0$ sans que $f(c)$ soit un extremum local de f.
Par exemple, si $f(x) = x^3$, alors $f'(0) = 0$ et pourtant $f(0) = 0$ n'est pas un extremum local de f.

Exemple : Soit f la fonction définie sur ℝ par $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x - 1$.

f est un polynôme, donc dérivable sur ℝ, et pour tout x réel, $f'(x) = x + 3$.

Le signe de $f'(x)$ est donné par le tableau .
Il en résulte :

- f est strictement croissante sur $[-3 ; +\infty[$,
- f est strictement décroissante sur $]-\infty ; -3]$.

$f(-3) = \frac{1}{2}\times(-3)^2 + 3 \times (-3) - 1 = \frac{9}{2} - 9 - 1 = -\frac{11}{2}$.

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{11}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

$-\frac{11}{2}$ est un minimum local de f.

remarque : dans ce cas, tous les nombres $f(x)$ sont supérieurs à $-\frac{11}{2}$. On dit que $-\frac{11}{2}$ est **le** minimum absolu de la fonction f.