DROITES ET SYSTEMES

1) EQUATION D'UNE DROITE

A) EQUATION REDUITE D'UNE DROITE DU PLAN

Le plan est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$

- Toute droite parallèle à l'axe des ordonnées admet une équation de la forme **x = k** où k est un réel.
- Toute droite non parallèle à l'axe des ordonnées admet une équation de la forme **y = ax + b** où a et b sont des réels.

Dans les deux cas, l'équation est appelée **équation réduite** de la droite.

Preuve :
Le plan est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
Soit d une droite du plan, $A (x_A ; y_A)$ et $B (x_B ; y_B)$ deux points distincts de la droite d.
Soit $M (x ; y)$ un point du plan.
On a $\overrightarrow{AM} (x - x_A ; y - y_A)$ et $\overrightarrow{AB} (x_B - x_A ; y_B - y_A)$
M appartient à la droite d si, et seulement si, $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires, ce qui revient à dire que :

$\det (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = 0 \Leftrightarrow (x - x_A)(y_B - y_A) - (y - y_A)(x_B - x_A) = 0 \quad (E)$

A et B sont distincts, on a donc deux cas :

cas 1 : $x_A = x_B$ et $y_A \neq y_B$

$(E) \Leftrightarrow (x - x_A)(y_B - y_A) = 0 \Leftrightarrow x = x_A$

En posant $x_A = k$, on obtient :
$M \in (AB) \Leftrightarrow x = k$

cas 2 : $x_A \neq x_B$

$(E) \Leftrightarrow y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A) \Leftrightarrow y = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} x - \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} x_A + y_A$

En posant $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ et $b = -\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} x_A + y_A$, on obtient :
$M \in (AB) \Leftrightarrow y = ax + b$

L'ensemble des points M (x ; y) tels que :

- x = k où k est un réel, est une droite parallèle à l'axe des ordonnées.
- y = ax + b où a et b sont des réels, est une droite non parallèle à l'axe des ordonnées.

Preuve:

- Si x = k , tous les points ont la même abscisse et le résultat est immédiat
- Soit A (0 ; b) et B (1; a + b) , deux points distincts de l'ensemble cherché, et M (x ; y) un point du plan tel y = a x + b.
  On a : $\overrightarrow{AB} (1 ; a)$ et $\overrightarrow{AM} (x ; a x)$
  Ainsi $\overrightarrow{AM} = x \overrightarrow{AB}$ et on en déduit que le point M appartient à la droite (AB).

Rem :
Toute droite admet une infinité d'équations, appelées équations cartésiennes de la droite.
Les équations suivantes sont des équations de la même droite : $y = 2x + 1 \Leftrightarrow -2x + y - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x - y + 1 = 0 \Leftrightarrow 4x - 2y + 2 = 0 \Leftrightarrow \ldots$

B) DROITES PARALLELES

Si dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, une droite d a pour équation y = a x + b , alors le vecteur $\vec{u} (1 ; a)$ est un vecteur directeur de d.

Preuve :
A (0 ; b) et B (1; a + b) sont deux points distincts de d .
Le vecteur $\overrightarrow{AB} (1 ; a)$ est donc un vecteur directeur de d .

Dans le plan muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ on considère les droites d : y = a x + b et d' : y = a' x + b '.
Les droites d et d' sont parrallèles si, et seulement si, elles ont le même coefficient directeur.

d // d' $\Leftrightarrow$ a = a'

Preuve :
$\vec{u} (1 ; a)$ et $\vec{v} (1 ; a')$ sont respectivement des vecteurs directeurs de d et de d'.
Dire que d et d' sont parallèles, signifie qu'elles ont la même direction, c'est à dire que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, ce qui revient à dire que :
$\det (\vec{u}, \vec{v}) = 0 \Leftrightarrow 1 \times a - 1 \times a' = 0 \Leftrightarrow a = a'$

2) SYSTEMES LINEAIRES

A) EQUATION LINEAIRE A DEUX INCONNUES

Toute équation de la forme a x + b y = c , où a, b et c sont des réels donnés, est une équation linéaire à deux inconnues x et y.

Tout couple $(x_0 ; y_0)$ vérifiant $a x_0 + b y_0 = c$ est une **solution** de cette équation.
Résoudre une telle équation, c'est déterminer tous les couples (x ; y) solutions.

Interprétation géométrique :

Dans le plan muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, l'ensemble des points M (x , y) dont les coordonnées vérifient la relation a x + b y = c où $(a ; b) \neq (0 ; 0)$ est une droite :

- Si b = 0 , la droite a pour équation réduite $x = \frac{c}{a}$
- Si b ≠ 0 , la droite a pour équation réduite $y = -\frac{a}{b} x + \frac{c}{b}$

Les solutions de l'équation sont les couples (x ; y) coordonnées des points appartenant à la droite.

B) SYSTEME LINEAIRE DE DEUX EQUATIONS A DEUX INCONNUES

On appelle système linéaire de deux équations à deux inconnues, x et y, tout système qui peut se mettre sous la forme :

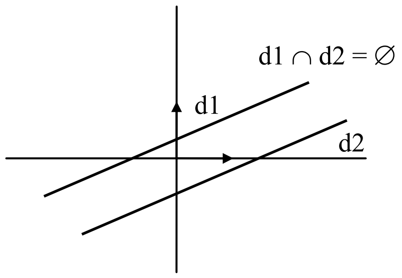
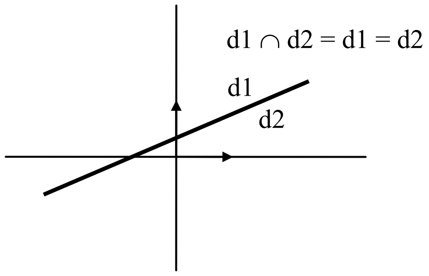
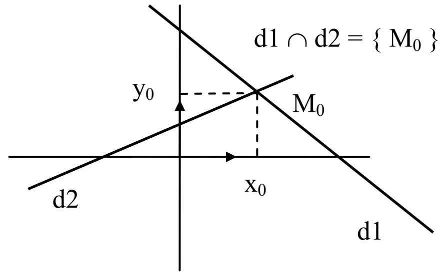
$$(S) \left\{ \begin{array}{ll} ax + b\,y = c & (L1) \\ a'x + b'\,y = c' & (L2) \end{array} \right.$$ où a, b, c, a', b' et c' sont des réels donnés.

Résoudre un tel système, c'est rechercher le (ou les) couple(s) (x ; y) vérifiant à la fois les deux équations.

C) RESOLUTION

Interprétation géométrique :

Soit le système (S) dans lequel nous supposons (a ; b) $\neq$ (0 ; 0) et (a' ; b') $\neq$ (0 ; 0).
Dans le plan muni d'un repère (O; $\vec{i}$, $\vec{j}$) , les équations (L1) et (L2) sont des équations cartésiennes de deux droites d1 et d2 .
Un couple (x ; y) de nombres est solution de (S) si, et seulement si, le point M (x ; y) appartient à d1 et à d2 .
Résoudre (S) revient donc à étudier la position relative des droites d1 et d2 .

<table>
<tr><td>d1 et d2 sont strictement parallèles</td><td>d1 et d2 sont confondues</td><td>d1 et d2 sont sécantes</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">a b' – a' b = 0</td><td>a b' – a' b ≠ 0</td></tr>
<tr><td>(S) n'a aucune solution</td><td>(S) a une infinité de solutions : tous les couples coordonnées des points de d1 (ou de d2)</td><td>(S) a une unique solution : (x_0 ; y_0) coordonnées de M_0</td></tr>
</table>

Le système $\left\{ \begin{array}{l} ax + b\,y = c \\ a'x + b'\,y = c' \end{array} \right.$ tel que a b' – a' b ≠ 0 admet une **unique** solution.

Méthodes numériques de résolution :

Résoudre le système (S) : $\left\{ \begin{array}{ll} 3\,x - 2\,y = 5 & (L1) \\ x + 3\,y = 9 & (L2) \end{array} \right.$

$3 \times 3 - (-2) \times 1 = 9 + 2 = 11$
Le système (S) admet donc une unique solution.

RESOLUTION PAR SUBSTITUTION

METHODE	RESOLUTION	COMMENTAIRES
• Exprimer x en fonction de y (ou y en fonction de x) à l'aide de la première ou de la deuxième équation	• (L 2) permet d'écrire : $x = 9 - 3\,y$	Il ne faut pas partir tête baissée … Il faut essayer de choisir l'expression qui facilite le plus les calculs.
• Remplacer ensuite x par cette expression dans la deuxième équation, ce qui permet de trouver y.	• En remplaçant x par $9 - 3\,y$ dans (L1) , on obtient : $3 (9 - 3\,y) - 2\,y = 5$ $\Leftrightarrow$ $27 - 9\,y - 2\,y = 5$ $\Leftrightarrow$ $22 = 11\,y$ $\Leftrightarrow$ $y = 2$	On obtient une équation à une inconnue (y ici) On a trouvé y
• Calculer x en utilisant la valeur de y	• En remplaçant y par 2 dans $x = 9 - 3\,y$, on obtient : $x = 9 - 3 \times 2 = 9 - 6 = 3$	On a trouvé x
• Vérifier que le couple (x ; y) trouvé est bien solution du système	• On vérifie que le couple (3 ; 2) est solution du système (S) : $3 \times 3 - 2 \times 2 = 9 - 4 = 5$ $3 + 3 \times 2 = 3 + 6 = 9$	Attention à l'ordre !
• Conclure	• Le couple (3 ; 2) est donc l'unique solution du système (S)	

RESOLUTION PAR COMBINAISON (OU ELIMINATION)

METHODE	RESOLUTION	COMMENTAIRES
• Multiplier les deux équations par des nombres bien choisis afin d'obtenir le même coefficient devant x (ou y si c'est plus simple)	• On multiplie les deux membres de l'équation (L2) par 3 . On obtient : $\begin{cases} 3x - 2y = 5 & (L1) \\ 3(x + 3y) = 3 \times 9 & (L'2 \leftarrow 3L2) \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2y = 5 & (L1) \\ 3x + 9y = 27 & (L'2) \end{cases}$	Cette écriture signifie que l'on a multiplié les 2 membres de l'équation (L2) par 3 et que l'on a appelé la nouvelle équation (L'2)
• Soustraire (ou additionner) membre à membre pour éliminer x (ou y)	• On soustrait membre à membre (L'2) à (L1) ; On obtient : $3x - 2y - (3x + 9y) = 5 - 27$ $\Leftrightarrow -11y = -22$ $\Leftrightarrow y = 2$	On a trouvé y
• Remplacer y par sa valeur dans une des équations.	• On remplace y par 2 dans (L1) . On obtient : $3x - 2 \times 2 = 5$ $\Leftrightarrow 3x = 9$ $\Leftrightarrow x = 3$	On a trouvé x
• Vérifier que le couple (x ; y) trouvé est bien solution du système	• … déjà vu !	
• Conclure	• … ça aussi !	