Chapitre III : Dérivées de fonctions composées et primitives

I. Dérivées de fonctions composées

a) Formule

Propriété 1: g est une fonction dérivable sur un intervalle J.
u est une fonction dérivable sur un intervalle I tel que, pour tout x de I, $u(x)$ appartient à J.
Alors la fonction $f = g \circ u$ est dérivable sur I, et pour tout x de I :

$$f'(x) = g'(u(x)) \times u'(x).$$

Exemple : déterminer la dérivée f' de la fonction f définie sur $[1\ ;+\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{5x-2}$.

On remarque que f est la composée de deux fonctions g et u définies par :
pour tout $x \in [1\ ;+\infty[$, $u(x) = 5x - 2$ et pour tout $x \in 3^+$, $g(x) = \sqrt{x}$.
u est bien strictement positive sur $[1\ ;+\infty[$, donc f est bien définie sur $[1\ ;+\infty[$.
u est dérivable sur $[1\ ;+\infty[$ et pour tout $x \in [1\ ;+\infty[$, $u'(x) = 5$.
g est dérivable sur $]0\ ;+\infty[$ et pour tout $x \in\ ]0\ ;+\infty[$, $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.
Donc d'après la propriété précédente, $f = g \circ u$ est dérivable sur $[1\ ;+\infty[$ et pour tout $x \in [1\ ;+\infty[$,
$f'(x) = \dfrac{5}{2\sqrt{5x-2}}$.

b) Dérivation de u^n avec n entier

Propriété 2 :
Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et n un entier relatif différent de 0 et de -1.
Alors la fonction u^n est dérivable :

- en tout point de I, lorsque $n \geq 2$,
- en tout point de I où u ne s'annule pas lorsque $n \leq -1$.

De plus : $(u^n)'(x) = n[u(x)]^{n-1} \times u'(x)$.

Exemple 1: Soit la fonction f définie sur 3 par $f(x) = (5x^2 - 3x)^4$.
f peut s'écrire sous la forme u^4 avec u définie sur 3 par $u(x) = 5x^2 - 3x$.
u est dérivable sur 3 et $u'(x) = 10x - 3$.
Donc f est dérivable sur 3 et $f'(x) = 4 \times (5x^2 - 3x)^3 \times (10x - 3)$.

Exemple 2 : f est la fonction définie sur $I =]-\dfrac{1}{2}\ ; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{(2x+1)^3}$.

Pour tout $x > -\dfrac{1}{2}$, $f(x) = (2x+1)^{-3} = [u(x)]^{-3}$ avec $u(x) = 2x + 1$.

u est dérivable sur I et ne s'annule pas sur I ; donc f est dérivable sur I.
Pour tout $x \in$ I, $f'(x) = -3 \times [u(x)]^{-3-1} \times u'(x)$.
Or $u'(x) = 2$, donc : $f'(x) = -6 \times (2x+1)^{-4} = \dfrac{-6}{(2x+1)^4}$.

c) Dérivation de $\sqrt{u}$

Propriété 3 : u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I.
Alors la fonction $f = \sqrt{u}$ est dérivable sur I, et $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$.

d) Sens de variation d'une fonction composée

Si u et g ont le même sens de variation, alors $f = g \circ u$ est croissante
Si u et g ont des sens de variation différents, alors $f = g \circ u$ est décroissante.

Exemples :

- f est la fonction définie sur $I = [2\ ; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x-2}$

$f = g \circ u$ avec $u(x) = x - 2$ et $g(x) = \sqrt{x}$.
u est strictement croissante sur I et pour tout $x \in$ I, $u(x) \geq 0$.
g est strictement croissante sur $[0\ ;+\infty[$. Donc f est strictement croissante sur I.

- f est la fonction définie sur I =]1 ; +∞[par $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$.

$f = g \circ u$ avec $u(x) = x - 1$ et $g(x) = \dfrac{1}{x}$.

u est strictement croissante sur I et pour tout $x \in$ I, $u(x) > 0$.
g est strictement décroissante sur]0 ; +∞[.
Donc f est strictement décroissante sur I.

II. Primitives

a) Notion de primitive

Définition : f est une fonction définie sur un intervalle I.
Une primitive de f sur I est une fonction F dérivable sur I et telle que pour tout $x \in$ I, $F'(x) = f(x)$.

Exemples : • Les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = 3x - 1$ et $G(x) = 3x + \dfrac{1}{10}$ sont des primitives de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3$.

• La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \dfrac{5}{2}x^2$ est une primitive de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x$.

Théorème : Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

Propriétés :
- *Addition :* Si F et G sont des primitives respectives, sur un intervalle I, des fonctions f et g. Alors (F + G) est une primitive sur I de $(f + g)$.
- Si F est une primitive de f sur un intervalle I et si k est une constante réelle fixée, alors kF est une primitive sur I de kf.

b) Ensemble des primitives d'une fonction

Théorème : f est une fonction définie sur un intervalle I.
1. Si F est une primitive de f sur I, alors toutes les fonctions $x \mapsto F(x) + k$, où k est un réel quelconque, sont des primitives de f sur I.
2. Si F et G sont deux primitives de f sur I, alors il existe un réel k tel que pour tout x de I, $G(x) = F(x) + k$.

c) Primitive prenant une valeur donnée en un point donné

Théorème : Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I.
Soit x_0 un réel appartenant à I et y_0 un réel quelconque, il existe une primitive G et **une seule** de f telle que $G(x_0) = y_0$.

Exercice : f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + 3$.
a) Donner une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
b) Donner toutes les primitives de f sur $\mathbb{R}$.
c) Donner la primitive G de f sur $\mathbb{R}$ telle que $G(-1) = 0$.

Solution :
a) Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est la fonction F, définie par $F(x) = x^2 + 3x$.
b) Toute primitive de f sur $\mathbb{R}$ est une fonction G telle que : $G(x) = F(x) + k = x^2 + 3x + k$ $(k \in \mathbb{R})$.
c) $G(-1) = 0$ équivaut à $1 - 3 + k = 0$; donc $k = 2$.
Donc la primitive G de f telle que $G(-1) = 0$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = x^2 + 3x + 2$.

d) Primitives de fonctions usuelles

On obtient des primitives de fonctions usuelles par lecture inverse du tableau des dérivées. Dans les tableaux suivants, k désigne un réel quelconque.

Fonction f définie par	Primitives F de f définie par	sur I
$f(x) = c$ (où c est une constante)	$F(x) = cx + k$	I = 3
$f(x) = x^n$ ($n \in$ ∠*)	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k$	I = 3
$f(x) = \frac{1}{x^n}$ ($n \in$ ∠* et $n \neq 1$)	$F(x) = \frac{-1}{n-1} \times \frac{1}{x^{n-1}} + k$	I =]0 ; +∞[ou I =]-∞ ; 0[
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x} + k$	I =]0 ; +∞[

Cas particulier : si $f(x) = \frac{1}{x^2}$, on obtient comme primitive : $F(x) = -\frac{1}{x} + k$.

→ en notant $\frac{1}{x^n} = x^{-n}$ ($n \in$ ς), on obtient comme primitive, en utilisant la même expression que dans la deuxième ligne : $F(x) = \frac{1}{-n+1} x^{-n+1} + k = \frac{-1}{n-1} \times \frac{1}{x^{n-1}} + k$.

Dans ce deuxième tableau, on note D_u le domaine de définition de la fonction u, et D_v celui de v.

Fonction f	**Primitives de f**	**sur**
cu' où $c \in$ 3	$cu + k$	D_u
$u' + v'$	$u + v + k$	$D_u \cap D_v$
$u' \times u^n$ où $n \in$ Ω\{-1}	$\frac{1}{n+1} \times u^{n+1} + k$	D_u si $n > 0$ D_u\{x tels que $u(x) = 0$} si $n<0$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + k$	D_u\{x tels que $u(x) \leq 0$}
$u' \times (v' \circ u)$	$v \circ u + k$	$D_{u \circ v}$

Exemples :

- Cherchons les primitives sur]0 ; +∞[de la fonction f définie par $f(x) = -\frac{1}{8x^3} + x^2$.

f est continue sur]0 ; +∞[, elle admet donc des primitives sur]0 ; +∞[.

Une primitive de la fonction $x \mapsto -\frac{1}{8x^3} = -\frac{1}{8} \times \frac{1}{x^3} = -\frac{1}{8} \times x^{-3}$ est $-\frac{1}{8} \times \frac{1}{-3+1} \times x^{-2} = \frac{1}{16x^2}$.

Une primitive de $x \mapsto x^2$ est $\frac{1}{2+1} x^3 = \frac{1}{3} x^3$.

La fonction f admet donc pour primitives les fonctions F définies par : $F(x) = \frac{1}{16x^2} + \frac{1}{3} x^3 + k$ ($k \in$ 3).

- Cherchons les primitives sur]-1 ; 1[de la fonction f définie par $f(x) = \frac{2x}{(x^2 - 1)^2}$.

f est continue sur]-1 ; 1[(fonction rationnelle), elle admet donc des primitives sur]-1 ; 1[.

f est de la forme $\frac{u'}{u^2}$ avec $u(x) = x^2 - 1$. La fonction f admet donc comme primitives sur]-1 ; 1[les fonctions $F(x) = -\frac{1}{x^2 - 1} + k$ où $k \in$ 3.

- Recherche des primitives de la fonction f définie sur 3 par $f(x) = \frac{4x^3}{\sqrt{x^4 + 1}}$.

Pour tout x réel, $x^4 + 1 > 0$ et la fonction f est continue sur 3, elle admet donc des primitives F sur 3

$f = \frac{u'}{\sqrt{u}}$ avec $u(x) = x^4 + 1$.

On obtient alors : $F(x) = 2\sqrt{x^4 + 1} + k$ avec $k \in$ 3.

III. Fonctions coût

On considère une entreprise produisant au cours d'une période une quantité q d'un certain produit. Le coût total d'une quantité q est alors exprimé par une fonction $C(q)$. Cette fonction est appelée **fonction coût total**. Elle est positive et croissante.
Le **coût fixe** est $C(0)$, tandis que le **coût variable** est alors $C(q) - C(0)$.
Le **coût moyen** unitaire est alors défini par $C_M(q) = \dfrac{C(q)}{q}$. On appelle coût marginal de q, le coût de fabrication du $(q+1)^{\text{ième}}$ produit. On le note $C_m(q)$ et on admet que $C_m(q) = C'(q)$.
Ainsi le coût total C est une primitive du coût marginal C_m.

Exemple :
Une entreprise qui fabrique des objets estime que le coût total, en milliers d'euros, de production de x tonnes d'objets s'exprime, en fonction de x, par : $C(x) = x^3 - 12x^2 + 60x$.
1. Etudier les variations de la fonction $x \mapsto C(x)$ sur $[0 ; +\infty[$.

Le coût moyen de fabrication est donné par $C_M(x) = \dfrac{C(x)}{x}$ (pour $x > 0$)
2. Quel est le coût moyen de fabrication de 500 kg ?
3. Exprimer $C_M(x)$ en fonction de x, puis étudier les variations de la fonction $x \mapsto C_M(x)$ sur $[0 ; +\infty[$.
4. Tracer la représentation graphique (G) de la fonction $x \mapsto C_M(x)$ dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (en abscisse : 1 cm pour 1 tonne ; en ordonnée : 1 cm pour 10 000 euros)

On note $C_m(x)$ le coût marginal de x, et on admet que $C_m(x) = C'(x)$.
5. a) Etudier les variations de la fonction $x \mapsto C_m(x)$ sur $[0 ; +\infty[$.
b) Tracer la représentation graphique (H) de cette fonction sur le même graphique que (G).
6. a) Déterminer l'abscisse α du point d'intersection des courbes (G) et (H).
b) Que représente $C_M(\alpha)$ pour la fonction $x \mapsto C_M(x)$?
7. L'entreprise vend sa production 60 000 euros la tonne.
On note $B(x)$ le bénéfice réalisé pour la vente de x tonnes.
a) Vérifier que $B(x) = -x^3 + 12x^2$.
b) Etudier les variations de la fonction $x \mapsto B(x)$.
c) Pour quelle valeur de x le bénéfice est-il maximal ?
Vérifier alors que, pour cette valeur de x, le coût marginal est égal au prix de vente unitaire.

Solution :
1. C est une fonction polynôme, elle est alors dérivable sur $[0 ; +\infty[$.
$C'(x) = 3x^2 - 2 \times 12x + 60 = 3x^2 - 24x + 60$.
Déterminons le signe de C :
$\Delta = (-24)^2 - 4 \times 3 \times 60 = 576 - 720 = -144$
$\Delta < 0$, C' est donc du signe de 3, c'est à dire $C'(x) > 0$ pour tout $x \in [0 ; +\infty[$.
C est alors strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.
Tableau de variation :

x	0		$+\infty$
$C'(x)$		$+$	
C	0	$\nearrow$	$+\infty$

$C(0) = 0^3 - 12 \times 0^2 + 60 \times 0 = 0$
$\lim\limits_{x \to +\infty} C(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$

Le coût moyen est donné par $C_M(x) = \dfrac{C(x)}{x}$.
2. $C(500) = 500^3 - 12 \times 500^2 + 60 \times 500 = 125\,000\,000 - 12 \times 25\,000 + 30\,000$

$= 125\ 000\ 000 - 300\ 000 + 30\ 000 = 124\ 730\ 000$

Donc $C_M(500) = \dfrac{124\ 730\ 000}{500} = 249\ 460$.

3. $C_M(x) = \dfrac{C(x)}{x} = \dfrac{x^3 - 12x^2 + 60x}{x} = x^2 - 12x + 60$

C_M est une fonction polynôme, elle est alors dérivable sur $[0 ; +\infty[$.

$C_M'(x) = 2x - 12$

alors : $C_M'(x) > 0$ pour $x > 6$ et $C_M'(x) < 0$ pour $x < 6$

C_M est alors strictement décroissante sur $[0 ; 6]$ et strictement croissante sur $[6 ; +\infty[$.

Tableau de variation de C_M :

x	0		6		$+\infty$
$C_M'(x)$		$-$	0	$+$	
C_M	60	$\searrow$	24	$\nearrow$	$+\infty$

$C_M(0) = 0^2 - 12 \times 0 + 60 = 60$

$C_M(6) = 6^2 - 12 \times 6 + 60 = 36 - 72 + 60 = 24$

$\lim\limits_{x \to +\infty} C_M(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$

On note $C_m(x)$ le coût marginal de x. $C_m(x) = C'(x)$

5. a) $C_m(x) = 3x^2 - 24x + 60$.

C_m est une fonction polynôme, elle est donc dérivable sur $[0 ; +\infty[$.

$C_m'(x) = 6x - 24$

alors : $C_m'(x) > 0$ pour $x > 4$ et $C_m'(x) < 0$ pour $x < 4$

C_m est donc strictement décroissante sur $[0 ; 4]$ et strictement croissante sur $[4 ; +\infty[$.

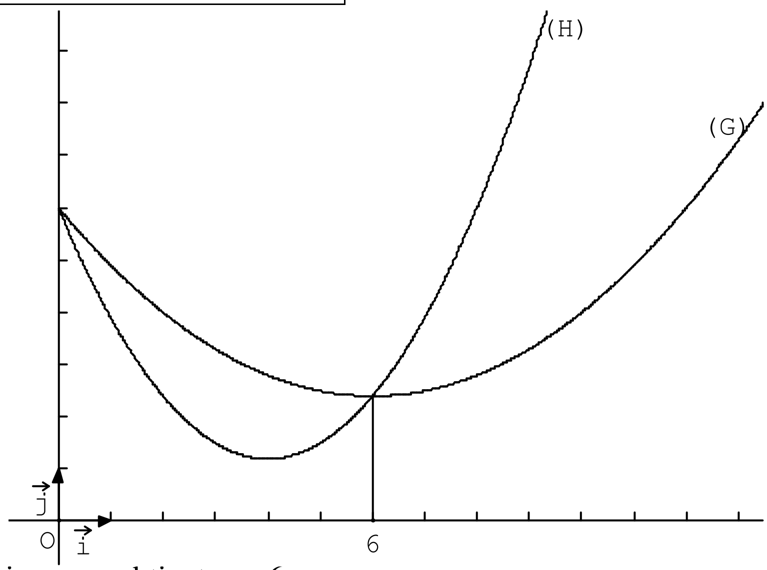
Tableau de variation de C_m :

x	0		4		$+\infty$
$C_m'(x)$		$-$	0	$+$	
C_m	60	$\searrow$	12	$\nearrow$	$+\infty$

$C_m(0) = 3 \times 0^2 - 24 \times 0 + 60 = 60$

$C_m(4) = 3 \times 4^2 - 24 \times 4 + 60 = 48 - 96 + 60 = 12$

$\lim\limits_{x \to +\infty} C_m(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 3x^2 = +\infty$



6. a) Par lecture graphique, on obtient $\alpha = 6$.

b) $C_M(\alpha)$ est le minimum de la fonction C_M sur $[0 ; +\infty[$.

7. a) Le prix de vente de x tonnes, en milliers d'euros, est $60x$.

Le bénéfice réalisé pour la vente de x tonnes est alors :

$B(x) = 60x - C(x) = 60x - (x^3 - 12x^2 + 60x) = -x^3 + 12x^2$.

b) B est une fonction polynôme, elle est donc dérivable sur $[0 ; +\infty[$.

$B'(x) = -3x^2 + 24x = -3x(x - 8)$

Les racines du trinôme sont 0 et 8.

alors, $B'(x) > 0$ pour $x \in]0 ; 8[$ et $B'(x) < 0$ pour $x \in]8 ; +\infty[$..

B est donc strictement croissante sur $[0 ; 8]$ et strictement décroissante sur $[8 ; +\infty[$.

c) B admet alors un maximum en 8 qui est $B(8) = -8^3 + 12 \times 8^2 = -512 + 768 = 256$

Le bénéfice maximal est atteint pour 8 tonnes et est de 256 000 euros.
$C_m(8) = 3 \times 8^2 - 24 \times 8 + 60 = 192 - 192 + 60 = 60$
Le coût marginal vaut bien le prix de vente unitaire.