GENERALITES SUR LES FONCTIONS

I) QUELQUES RAPPELS ESSENTIELS SUR LA NOTION DE FONCTION

1) DEFINITION

*Pour schématiser , **une fonction** est un procédé qui associe à chaque réel d'un intervalle donné **un unique** réel .*

Mathématiquement parlant , on caractérise une fonction de la façon suivante :

$$f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x)$$

Cette écriture signifie que la fonction f , définie sur l'intervalle I , associe à tout réel x de l'intervalle I , **le** *(il est unique)* réel noté $f(x)$, appelé **image de x par f** .

x ne représente pas un réel donné , mais n'importe lequel des éléments de l'intervalle I . On dit que x est une variable .(On peut aussi utiliser les lettres u , t , etc)

On a appelé la fonction f , mais rien ne nous oblige à l'appeler ainsi . (On utilise souvent les lettres g , h , etc ou f1 , f2 ...)

Rem:

- Dans la pratique, les fonctions sont souvent données sans que soit précisé l'ensemble de définition.

Dans ce cas n'oubliez pas de chercher $\mathscr{D}_f$, en vous rappelant qu'il s'agit de tous les réels x tels que $f(x)$ soit calculable.

- Les fonctions peuvent aussi être définies sur des réunions d'intervalles.

Par exemple la fonction inverse $f : x \longmapsto \frac{1}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$.

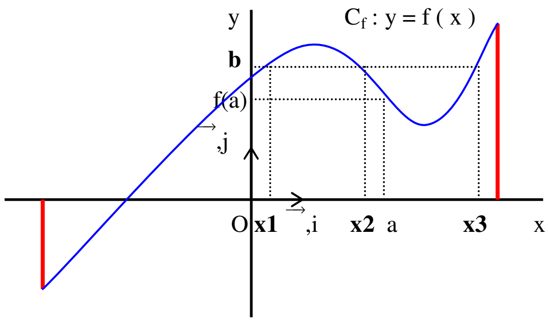
2) REPRESENTATION GRAPHIQUE

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$

Si possible, on prend le repère orthonormé

Soit f une fonction définie sur une partie I de $\mathbb{R}$ *(I est un intervalle ou une réunion d'intervalles)* .

L'ensemble des points M de coordonnées $(x , f(x))$ où x décrit I est **la courbe représentative** (ou **représentation graphique**) de la fonction f dans le plan .



On note, le plus souvent, $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f.

On dit que la courbe $\mathscr{C}_f$ a pour équation cartésienne $y = f(x)$ relativement au repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

Rem :

- On a déjà insisté sur le fait que pour tout réel x de I , $f(x)$ est unique.

On en déduit une interprétation géométrique : *toute droite parallèle à l'axe des ordonnées coupe la courbe représentative d'une fonction en **au plus** un point . Ceci est un moyen simple pour savoir si une courbe représente ou non une fonction ...*

- $f(a)$ est l'unique **image** de a .
- **$x1$, $x2$** et **$x3$** sont **les antécédents** de b . (Un réel peut admettre aucun antécédent, ou un, ou plusieurs antécédents.)

II) PARITE

1) FONCTIONS PAIRES ET IMPAIRES

Théorème :

ne pas oublier de le vérifier !

Soit f une fonction définie sur un ensemble **I centré en zéro**.
- On dit que f est **paire** si , pour tout réel x de I , $f(-x) = f(x)$.
- On dit que f est **impaire** si , pour tout réel x de I , $f(-x) = -f(x)$.

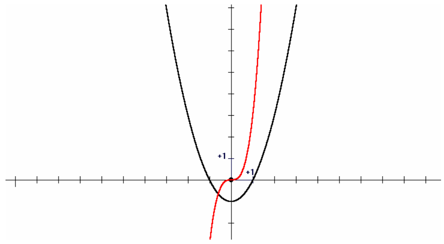
I centrée en zéro signifie que pour tout élément x de I , $-x$ est aussi dans I .

Rem : $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^*$ sont bien sûr centrés sur 0 . Si une fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^*$, il suffit seulement de montrer une des deux relations.

Propriété graphique

- f est **paire** *se traduit par* : la représentation graphique de f dans un repère *orthogonal* est **symétrique par rapport à l'axe des ordonnées**.
- f est **impaire** *se traduit par* : la représentation graphique de f est **symétrique par rapport à l'origine du repère**

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$



La courbe représentative d'une fonction paire admet l'axe des ordonnées pour axe de symétrie .
Ex : $f : x \longmapsto x^2 - 1$

La courbe représentative d'une fonction impaire admet le point O pour centre de symétrie .
Ex : $f : x \longmapsto 3x^3$

2) ELEMENTS DE SYMETRIE

Théorème :

- La **droite d'équation $x = a$ est un axe de symétrie** de la représentation graphique de f lorsque pour tout $(a + x)$ et $(a - x)$ de I, on a : $f(a + x) = f(a - x)$
- Le point **$A(a, b)$ est un centre de symétrie** de la représentation graphique de f lorsque pour tout $(a + x)$ et $(a - x)$ de I, on a : $f(a + x) + f(a - x) = 2b$.

Remarque Il existe des fonctions ni paires ni impaires.

Exemple : Soit f telle que $f(x) = (x - 1)^2$, définie sur $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
$\mathcal{D}$ est symétrique par rapport à zéro mais $f(1) = 0$ et $f(-1) = 4$
Les images des deux nombres opposés 1 et – 1 ne sont ni égales ni opposées donc f n'est ni paire ni impaire.

Ex :
Les fonctions $x \longmapsto |x|$, $x \longmapsto \cos x$ et $x \longmapsto x^2$, définies sur $\mathbb{R}$, sont des fonctions paires .
Les fonctions $x \longmapsto x$, $x \longmapsto \sin x$ et $x \longmapsto x^3$,définies sur $\mathbb{R}$, et la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$, définie sur $\mathbb{R}^*$, sont des fonctions impaires .

Rem : Si une fonction f est paire ou impaire, il suffit de l'étudier sur $\mathcal{D}_f \cap \mathbb{R}^*$.

III) VARIATIONS

1) FONCTION CROISSANTE …

Définition :

On ne parle de croissance ou de décroissance **que sur un intervalle !**

Soit f une fonction définie sur un intervalle I . On dit que :

- f est **croissante** (resp. **strictement croissante**) sur I , lorsque pour tous réels x et x' de I , tels que $a < b$, on a $f(a) \leq f(b)$ (resp. $f(a) < f(b)$) .
- f est **décroissante** (resp. **strictement décroissante**) sur I , lorsque pour tous réels x et x' de I , tels que $a < b$, on a $f(a) \geq f(b)$ (resp. $f(a) > f(b)$) .
- f est **monotone** (resp. **strictement monotone**) sur I , lorsque f est soit croissante (resp. strictement) sur I , soit décroissante (resp. strictement) sur I .

Etudier les variations d'une fonction, c'est préciser les intervalles sur lesquels la fonction est monotone.

On résume ces résultats dans un tableau appelé (*comme vous le savez*) **tableau de variations** .

2) EXTREMUM

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I , x_0 et x_1 deux réels de I . On dit que :

- f admet **un minimum** sur I en x_0 , si pour tout réel x de I , $f(x_0) \leq f(x)$.
- f admet **un maximum** sur I en x_1 , si pour tout réel x de I , $f(x_1) \geq f(x)$.

Ex : Pour tout réel x , $x^2 + 1 \geq 1$. De plus $0^2 + 1 = 1$

Ainsi, la fonction $x \longmapsto x^2 + 1$ admet 1 comme maximum en 0

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I . On dit que :

- f est **majorée** sur I , s'il existe un réel M tel que pour tout x de I , $f(x) \leq M$. On dit que M est **un majorant** de f .
- f est **minorée** sur I , s' il existe un réel m tel que pour tout x de I , $f(x) \geq m$. On dit que m est **un minorant** de f .
- f est **bornée** sur I , si elle est minorée et majorée sur I .

Tout réel M' supérieur à M est aussi un majorant de f .

Tout réel m' inférieur à m est aussi un minorant de f .

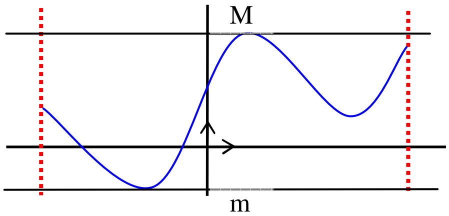
Une fonction est majorée par son maximum et est minorée par son minimum .

Attention !

Une fonction peut admettre un majorant (ou un minorant) sur un intervalle sans admettre forcément de maximum(ou de minimum) .

Ex : La fonction inverse est minorée par 0 sur l'intervalle] 0 ; + ∞ [, mais 0 n'est pas un minimum …

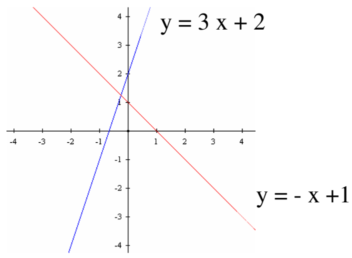
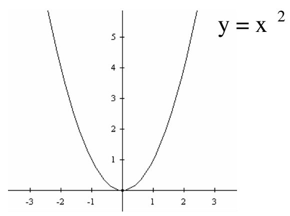
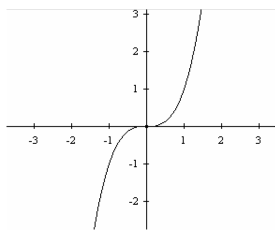
Interprétation graphique :



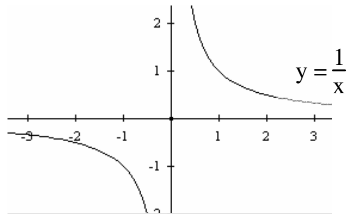
Dire que, sur un intervalle I, f est minorée par m et f est majorée par M (c'est à dire f est bornée) revient à dire graphiquement que la courbe représentative de f restreinte à I est située entre les deux droites parallèles d'équation y = m et y = M

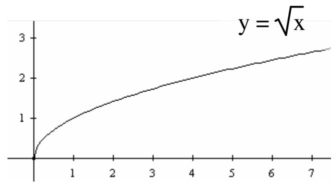
Remarque importante : La notion de **dérivée** que nous verrons plus tard est un outil très performant pour l'étude des variations ; nous ne nous attarderons donc pas sur les méthodes que vous avez vues en classe de seconde.

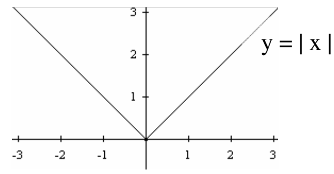
IV) PANORAMA DES FONCTIONS DE REFERENCE

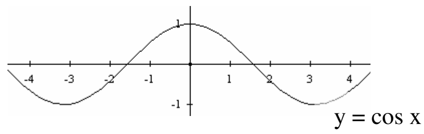
Fonctions	**Ensemble de définition, variations …**	**Représentations graphiques**
$f : x \longmapsto a\ x + b$	▪ $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$ ▪ Si a > 0 f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ ▪ Si a < 0 f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$	
$f : x \longmapsto x^2$	▪ $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$ ▪ f est paire ▪ f est strictement décroissante sur] -∞ ; 0] et strictement croissante sur [0 ; + ∞ [▪ La courbe représentative de f est **une parabole** de sommet O.	
$f : x \longmapsto x^3$	▪ $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$ ▪ f est impaire ▪ f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$	

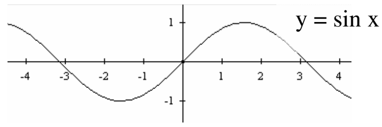
$f : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$	▪ $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}^*$ ▪ *f* est impaire ▪ *f* est strictement décroissante sur] -∞ ; 0 [et strictement décroissante sur] 0 ; + ∞ [▪ La courbe représentative de f est **une hyperbole** de sommet O.
$f : x \longmapsto \sqrt{x}$	▪ $\mathscr{D}_f = [\,0\,;+\infty\,[$ ▪ *f* est strictement croissante sur [0 ; + ∞ [
$f : x \longmapsto \lvert x \rvert$	▪ $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$ ▪ *f* est paire ▪ *f* est strictement décroissante sur] -∞ ; 0] et strictement croissante sur [0 ; + ∞ [
$f : x \longmapsto \cos x$	▪ $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$ ▪ *f* est paire ▪ *f* est périodique de période 2 π $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ ▪ La courbe représentative de f est une **sinusoïde**
$f : x \longmapsto \sin x$	▪ $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$ ▪ *f* est impaire ▪ *f* est périodique de période 2 π $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ ▪ La courbe représentative de f est une **sinusoïde**







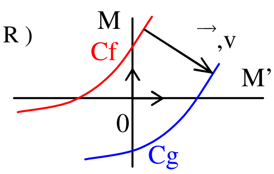
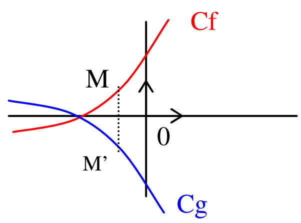
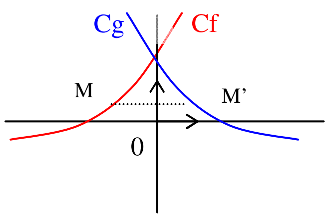
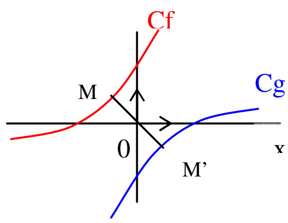




V) FONCTIONS ASSOCIEES

Soit *f* et *g* deux fonctions définies sur Df et Dg . On note Cf et Cg leurs courbes représentatives dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Si pour tout réel x de Dg , on a :

$g(x) = f(x-a) + b$ (où a ∈ I, R et b ∈ I, R) , alors : la courbe Cg est l'image de la courbe Cf par **la translation** de vecteur $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j}$ 	$g(x) = -f(x)$, alors : la courbe Cg est l'image de la courbe Cf par **la réflexion** d'axe (Ox) 
$g(x) = f(-x)$, alors : la courbe Cg est l'image de la courbe Cf par **la réflexion** d'axe (Oy) 	$g(x) = -f(-x)$, alors : la courbe Cg est l'image de la courbe Cf par **la symétrie** de centre O . 

…d'où l'utilité de connaître les courbes représentatives de quelques fonctions de références .

En exercice, on étudiera également les fonctions $x \longmapsto \lvert f(x) \rvert$, $x \longmapsto f(\lvert x \rvert)$ et $x \longmapsto a\,f(x)$

VI) COMPARAISON DE DEUX FONCTIONS

1) EGALITE

Définition :

Soit f et g deux fonctions.

On dit que les fonctions **f et g sont égales**, ce que l'on note **f = g** , si :

- $Df = Dg$
- pour tout $x \in Df$, $f (x) = g (x)$

Ex :

Les fonctions $f : x \longmapsto \sqrt{x^2}$ et $g : x \longmapsto | x |$ sont égales.

En effet Df = Dg = I, R et pour tout réel x , $f (x) = g (x)$

2) LA NOTATION $f \leq g$

Définition :

Soit f et g deux fonctions et I un intervalle inclus dans Df et dans Dg .

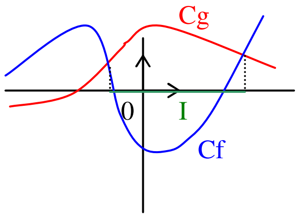
On dit que f est **inférieure** à g sur I, ce que l'on note **$f \leq g$** , si :

pour tout $x \in I$, $f (x) \leq g (x)$

On définit de la même manière **$f \geq g$** , **$f > g$** et **$f < g$** .

Interprétation graphique :

La courbe représentative de f restreinte à I est au-dessous de la courbe représentative de g restreinte à I . (mais pas sur $\mathbb{R}$ . ..)



Rem : Soit un intervalle I inclus dans D f :

- Si la fonction f admet M comme majorant sur I , cela signifie que $f \leq g$, avec $g : x \longmapsto M$, et par abus de langage , on note $f \leq M$ sur I .
- Si $f \leq 0$ sur I (on dit que f est négative sur I) , alors la courbe représentative de f restreinte à I est située sous l'axe (Ox) .
- De même si $f \geq 0$ …

VII) OPERATIONS SUR LES FONCTIONS

1) OPERATIONS ALGEBRIQUES

Soit f et g deux fonctions définies respectivement sur Df et Dg , et k un réel non nul.

Définition :

opérations	notations	définitions	Definie pour :
fonction **somme** de la fonction f et du réel k	$f + k$	$(f + k) (x) = f (x) + k$	$x \in Df$
fonction **produit** de la fonction f par le réel k	$k f$	$(k f) (x) = k \times f (x)$	$x \in Df$
fonction **somme** des fonctions f et g	$f + g$	$(f + g) (x) = f (x) + g (x)$	$x \in Df \cap Dg$
fonction **produit** des fonctions f et g	$f \times g$	$(f g) (x) = f (x) \times g (x)$	$x \in Df \cap Dg$
fonction **différence** de la fonction f et de la fonction g	$f - g$	$(f - g) (x) = f (x) - g (x)$	$x \in Df \cap Dg$
fonction **inverse** de la fonction f	$\frac{1}{f}$	$\left(\frac{1}{f}\right) (x) = \frac{1}{f (x)}$	$x \in Df$ et $f (x) \neq 0$
fonction **quotient** de la fonction f par la fonction g	$\frac{f}{g}$	$\left(\frac{f}{g}\right) (x) = \frac{f (x)}{g (x)}$	$x \in Df \cap Dg$ et $g (x) \neq 0$

Ex : On considère les fonctions $f : x \longmapsto - x + 1$ définie sur $\mathbb{R}$ et $g : x \longmapsto \frac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$

- $f + g$ est la fonction définie sur I, R^* par $(f + g) (x) = - x + 1 + \frac{1}{x}$
- $f \times g$ est la fonction définie sur I, R^* par $(f \times g) (x) = (- x + 1) \times \frac{1}{x} = - 1 + \frac{1}{x}$
- $5 f$ est la fonction définie sur I, R par $(5 f) (x) = 5 (- x + 1) = - 5 x + 5$

2) VARIATIONS *(preuves en exercices)*

Soit f et g deux fonctions monotones sur un intervalle I et k un réel non nul.

Théorème :

▪ Les fonctions **f** et **f + k** ont le même sens de variation sur I .	
▪ Si $k > 0$, les fonctions **f** et **k f** ont le même sens de variation sur I . ▪ Si $k < 0$, les fonctions **f** et **k f** ont des sens de variation contraire sur I .	
▪ Si **f** et **g** sont strictement croissantes sur I , alors **f + g** est strictement croissante sur I . ▪ Si **f** et **g** sont strictement décroissantes sur I , alors **f + g** est strictement décroissante sur I	

• $f - g = f + (- g)$ …

• Pour $f\,g$, il faut ajouter des hypothèses sur les signes de f et de g pour obtenir des résultats généraux.

• Pour $\frac{1}{f}$, nous utiliserons les compositions de fonctions.

• $\frac{f}{g} = f \times \frac{1}{g}$ …

VIII) COMPOSITION DE FONCTIONS

1) DEFINITION

> Soit f et g deux fonctions . On appelle **fonction composée de f par g** , et on note **g ∘ f** (lire « g rond f ») , la fonction définie par :
>
> $(g \circ f)(x) = g (f (x))$

L'écriture $(g \circ f)(x) = g (f (x))$ n'a de sens que si $x \in Df$ et $f (x) \in Dg$.

Ainsi dire que $x \in Dg \circ f$ revient à dire que $x \in Df$ et $f (x) \in Dg$.

Ex : On considère les fonctions $f : x \longmapsto x - 1$ définie sur $\mathbb{R}$ et $g : x \longmapsto \frac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

▪ $g \circ f$ est définie si, et seulement si, $x \in Df$ et $f (x) \in Dg$, ssi $x - 1 \neq 0$.

Ainsi $Dg \circ f = \mathbb{R} \setminus \{ 1 \}$ et , pour tout $x \in Dg \circ f$:

$(g \circ f) (x) = g (x - 1) = \frac{1}{x - 1}$

▪ $f \circ g$ est définie si, et seulement si, $x \in Dg$ et $g (x) \in Df$, ssi $x \neq 0$.

Ainsi $Df \circ g = \mathbb{R}^*$ et , pour tout $x \in Df \circ g$:

$(f \circ g) (x) = f (\frac{1}{x}) = \frac{1}{x} - 1$

> **En général : $f \circ g \neq g \circ f$**

2) VARIATIONS

Théorème :

> Soit f et g deux fonctions, telles que f soit strictement monotone sur $I \subset Df$ et g soit strictement monotone sur $J \subset Dg$, avec pour tout $x \in I$, $f (x) \in J$.
>
> ▪ Si f et g ont même sens de variation, alors la fonction composée $g \circ f$ est strictement croissante sur I .
>
> ▪ Si l'une des fonctions est strictement décroissante et l'autre strictement croissante, alors la fonction composée $g \circ f$ est strictement décroissante sur I .

• Ce théorème est surtout intéressant quand les fonctions f et g sont strictement monotones sur tout leur ensemble de définition

• Le théorème est aussi valable si on enlève strictement …

Preuve partielle :

Supposons que f et g soient strictement croissantes respectivement sur I et sur J .

Soient u et v deux réels de I , tels que $u < v$;

f est strictement croissante sur I, donc $f(u) < f(v)$.

D'après les hypothèses , $f(u)$ et $f(v)$ appartiennent à J . De plus g est strictement croissante sur J , donc :

$$g(f(u)) < g(f(v))$$

Ainsi $g \circ f$ est strictement croissante sur I . *Pour les autres cas , la preuve est identique …*

Ex : Soit la fonction $h : x \longmapsto \dfrac{1}{3x^2}$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

« L'expression $\dfrac{1}{3x^2}$ peut se schématiser $x \longmapsto 3x^2 \longmapsto \dfrac{1}{3x^2}$ »

Soit $f : x \longmapsto 3x^2$ et $g : y \longmapsto \dfrac{1}{y}$

Por tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$h(x) = \frac{1}{f(x)} = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$$

De plus $D_{g \circ f} = D_h$

Ainsi $h = g \circ f$

- La fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty ; 0[$, et l'image de cet intervalle par f est $f(]-\infty ; 0[) =]0 ; +\infty[$

De plus g est strictement décroissante sur $]0 ; +\infty[$.

On en déduit que $h = g \circ f$ est strictement croissante sur $]-\infty ; 0[$.

- La fonction f est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$, et l'image de cet intervalle par f est $f(]0 ; +\infty[) =]0 ; +\infty[$

De plus g est strictement décroissante sur $]0 ; +\infty[$.

On en déduit que $h = g \circ f$ est strictement décroissante sur $]0 ; +\infty[$.

Rem :

Voilà une méthode assez simple pour déterminer rapidement les variations de la fonction $\dfrac{1}{f}$ connaissant celles de la fonction f …