FONCTIONS : première approche

1) LA NOTION DE FONCTION

Soit D une partie de IR.
Définir une fonction sur D, c'est associer à chaque réel x de D, un réel **et un seul**, appelé **l'image** de x.

D est appelé l'ensemble (ou domaine) de définition de la fonction.

Au lieu d'écrire " f est la fonction qui à x associe f (x) ", on peut écrire :
$f : x \longmapsto f(x)$

- *x ne représente pas un réel donné , mais n'importe le quel des éléments de l'intervalle D . On dit que x est une variable .(On peut aussi utiliser les lettres u , t , etc)*
- *On a appelé la fonction f , mais rien ne nous oblige à l'appeler ainsi . (On utilise souvent les lettres g , h , etc ou f1 , f2 ...)*
- *L'image d'un réel x de D par la fonction f est noté f (x) (lire : " f de x ").*

Ex :
Lorsqu'à chaque réel x, on associe le réel $x^2 + 1$, on "fabrique" une fonction définie sur IR.
On note alors : $f : x \longmapsto x^2 + 1$
L'ensemble de définition est IR
L'image de 2 est $f(2) = 2^2 + 1 = 5$
L'image de $\sqrt{2}$ est $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}^2 + 1 = 3$

Attention : f (16) ne signifie pas $f \times 16$

Rem :

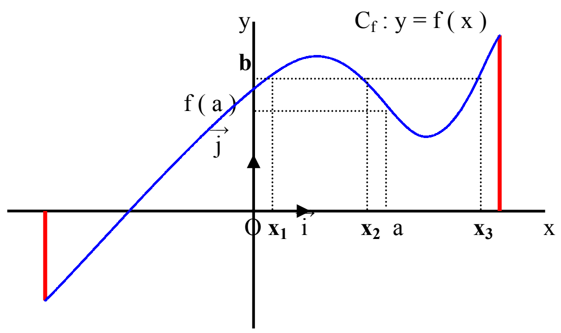
- Les fonctions peuvent aussi être définies sur des réunions d'intervalles.
  Par exemple , vous savez qu'on ne peut pas diviser par 0 .
  Vous n'êtes donc pas choqué si l'on considère la fonction f définie sur $]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$
- Dans la pratique, les fonctions sont souvent données sans que soit précisé l'ensemble de définition.
  Dans ce cas n'oubliez pas de chercher Df, en vous rappelant qu'il s'agit de tous les réels x tels que f (x) soit "calculable".

2) REPRESENTATION GRAPHIQUE

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Si possible, on prend le repère orthonormal

Soit f une fonction définie sur une partie D de IR (D est un intervalle ou une réunion d'intervalles) .
L'ensemble des points M de coordonnées (x , f (x)) où x décrit D est **la courbe représentative** (ou **représentation graphique**) de la fonction f dans le plan.



On note, le plus souvent, C_f la courbe représentative de f.

On dit que la courbe C_f a pour équation cartésienne y = f (x) relativement au repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Rem :

- On a déjà insisté sur le fait que pour tout réel x de D , f (x) est unique.

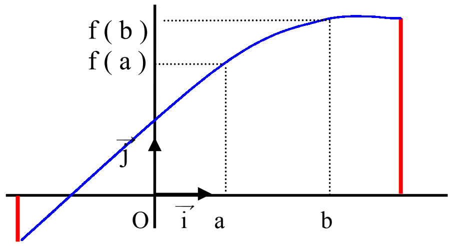
On en déduit une interprétation géométrique : *toute droite parallèle à l'axe des ordonnées coupe la courbe représentative d'une fonction en **au plus** un point . Ceci est un moyen simple pour savoir si une courbe représente ou non une fonction ...*

- f (a) est l'unique **image** de a . (*On place a sur l'axe des abscisses et on lit son image f (a) sur l'axe des ordonnées)*
- x_1 , x_2 et x_3 sont **les antécédents** de b . (*On place b sur l'axe des ordonnées et on lit **ses antécédents** x_1 , x_2 ... sur l'axe des abscisses)*
  Un réel peut admettre aucun antécédent, ou un, ou plusieurs antécédents.

3) SENS DE VARIATIONS

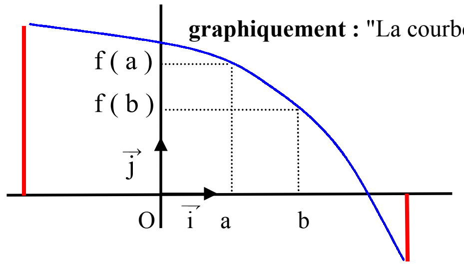
Soit f une fonction définie sur un intervalle I .
On dit que f est **croissante** (resp. **strictement croissante**) sur I ,
lorsque pour tous réels a et b de I , tels que **a < b** ,
on a **f (a)** $\leq$ **f (b)** (resp. **f (a) < f (b)**) .
Une fonction croissante conserve l'ordre.

graphiquement : "La courbe monte"



Soit f une fonction définie sur un intervalle I .
On dit que f est **décroissante** (resp. **strictement décroissante**) sur I ,
lorsque pour tous réels a et b de I , tels que **a < b** ,
on a **f (a)** $\geq$ **f (b)** (resp. **f (a) > f (b)**) .
Une fonction décroissante change l'ordre.

graphiquement : "La courbe descend"



Rem :

- f est **monotone** (resp. **strictement monotone**) sur I , lorsque f est soit croissante (resp. strictement) sur I , soit décroissante (resp. strictement) sur I .
- On ne parle de croissance ou de décroissance que sur un intervalle.
- Etudier les variations d'une fonction, c'est préciser les intervalles sur lesquels la fonction est monotone.
  On résume ces résultats dans un tableau appelé **tableau de variations**.

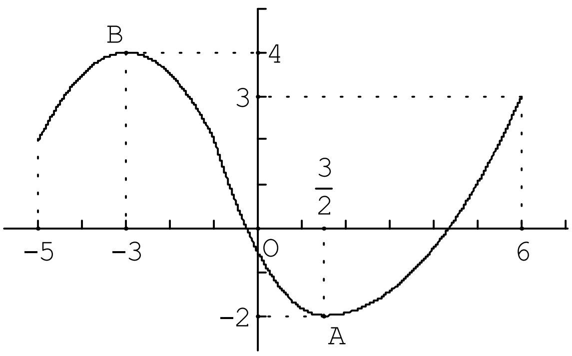
4) EXTREMUM

Soit f une fonction définie sur un intervalle I , x_m et x_M deux réels de I . On dit que :

- f admet **un minimum** sur I en x_m , si pour tout réel x de I , f $(x_m) \leq$ f (x) .
- f admet **un maximum** sur I en x_M , si pour tout réel x de I , f $(x_M) \geq$ f (x) .

Ex :

Soit la fonction f définie sur [– 5 ; 6] par sa courbe :



On définit graphiquement le sens de variation de f :

La fonction f est :

- croissante sur [– 5 ; – 3]

- décroissante sur [– 3 ; $\frac{3}{2}$]

- croissante sur [$\frac{3}{2}$; 6]

Le minimum sur l'intervalle [– 5 ; 6] de la fonction f représentée ci-contre est – 2. Il est obtenu lorsque x = $\frac{3}{2}$.
En effet, A est le point le plus « bas » de la courbe.

Le maximum sur l'intervalle [– 5 ; 6] est 4. Il est obtenu lorsque x = – 3.
En effet, B est le point le plus « haut » de la courbe.

On résume ces résultats dans le tableau de variation de f

x	– 5		– 3		$\frac{3}{2}$		6
f	2	↗	4	↘	– 2	↗	3