FONCTIONS DE REFERENCE

1) LA FONCTION CARRE

la fonction f définie sur IR par $x \longmapsto x^2$ s'appelle **la fonction carré**.

A) ETUDE DE LA PARITE

Soit f une fonction définie sur un ensemble **I centré en zéro**.
- On dit que f est **paire** si, pour tout réel x de I , $\mathbf{f(-x) = f(x)}$.
- On dit que f est **impaire** si, pour tout réel x de I , $\mathbf{f(-x) = -f(x)}$.

I centré en zéro signifie que pour tout élément x de I , $-x$ est aussi dans I .

Revenons à la fonction carré :
- IR est bien sûr centré en zéro. (Dans le cas où la fonction est définie sur IR, il n'est pas utile de le préciser)
- Pour tout $x \in$ IR, on a :

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

Ainsi la fonction carré est une fonction **paire.**

Interprétation graphique dans un repère orthogonal :

Les points M (x ; f (x)) et M'($-x$; f ($-x$)) qui sont des points de la courbe représentative de f sont symétriques par rapport à l'**axe des ordonnées**.
La représentation graphique de f admet donc l'**axe des ordonnées** pour **axe de symétrie**.

De façon plus générale :

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
La courbe représentative d'une fonction paire admet l'axe des ordonnées pour axe de symétrie.

B) SENS DE VARIATION

- Soit a et b deux nombres réels tels que $0 \leq a < b$
  On a déjà vu que deux nombres positifs sont rangés dans le même ordre que leurs carrés.
  On a donc $a^2 < b^2 \Leftrightarrow f(a) < f(b)$
  Donc f est strictement croissante sur $[0 ; +\infty [$
- Soit a et b deux nombres réels tels que $a < b \leq 0$
  On a alors : $0 \leq -b < -a$
  et : $(-b)^2 < (-a)^2 \Leftrightarrow b^2 < a^2 \Leftrightarrow f(b) < f(a)$
  Donc f est strictement décroissante sur $] -\infty ; 0]$

On en déduit le tableau de variations de la fonction carré.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		↘	0	↗	

f est strictement croissante sur $[0 ; +\infty [$

f est strictement décroissante sur $] -\infty ; 0]$

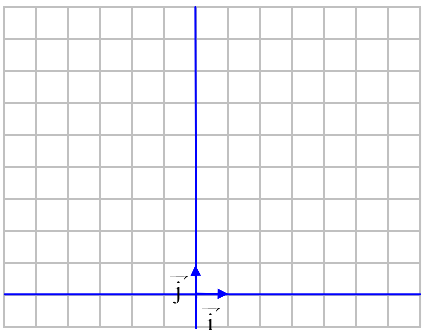
La fonction carré admet 0 comme minimum et ce minimum est atteint pour x = 0 .

C) TRACE DE LA COURBE REPRESENTATIVE

- En établissant un tableau de valeurs, on trace Cf sur IR_+

x	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3
f (x)	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{9}{4}$	4	$\frac{25}{4}$	9

- La fonction carré est paire.
  On complète la courbe en utilisant la symétrie d'axe (Oy).



La courbe représentative de f s'appelle une **parabole.**
Le point O est le sommet de la parabole.

Rem :
Lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes vers $+\infty$, il en est de même pour x^2.

2) LA FONCTION INVERSE

la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par $x \longmapsto \frac{1}{x}$ s'appelle **la fonction inverse**.

A) ETUDE DE LA PARITE

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$g(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -g(x)$$

Ainsi la fonction inverse est une fonction **impaire**.

Interprétation graphique dans un repère :

Les points M (x ; g (x)) et M'(– x ; g (– x)) qui sont des points de la courbe représentative de g sont symétriques par rapport à **l'origine du repère**.
La représentation graphique de g admet donc **l'origine du repère** pour **centre de symétrie**.

De façon plus générale :

Le plan est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
La courbe représentative d'une fonction impaire admet l'origine du repère pour centre de symétrie.

B) SENS DE VARIATION

- Soit a et b deux nombres réels tels que $0 < a < b$
  On a déjà vu que $\frac{1}{b} < \frac{1}{a} \Leftrightarrow g(b) < g(a)$
  Donc g est strictement décroissante sur $]0 ; +\infty[$

- Soit a et b deux nombres réels tels que $a < b < 0$
  On a alors : $0 < -b < -a$
  et : $\frac{1}{-a} < \frac{1}{-b} \Leftrightarrow -\frac{1}{a} < -\frac{1}{b} \Leftrightarrow \frac{1}{b} < \frac{1}{a} \Leftrightarrow g(b) < g(a)$
  Donc g est strictement décroissante sur $]-\infty ; 0[$

On en déduit le tableau de variations de la fonction inverse.

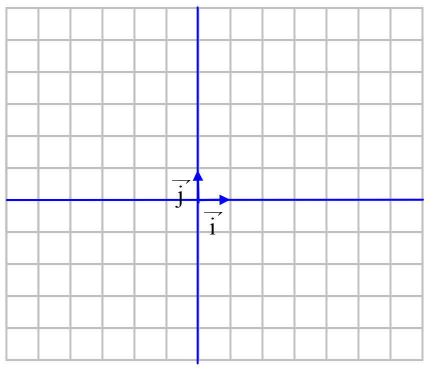
x	$-\infty$	0	$+\infty$
g	↘	‖	↘

g est strictement décroissante sur $]-\infty ; 0[$ **et** sur $]0 ; +\infty[$

C) TRACE DE LA COURBE REPRESENTATIVE

- En établissant un tableau de valeurs, on trace Cf sur $\mathbb{R}_+$

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	5
f (x)	4	2	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$



- La fonction inverse est impaire.
  On complète la courbe en utilisant la symétrie de centre O.

La courbe représentative de f s'appelle une **hyperbole**.
Le point O est le centre de l'hyperbole.

Les axes du repère sont appelés les asymptotes de l'hyperbole.

3) FONCTIONS COSINUS ET SINUS

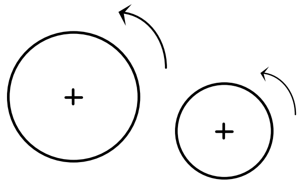
A) ORIENTATION DU PLAN - MESURE DES ANGLES EN RADIAN

a) ORIENTATION DU PLAN

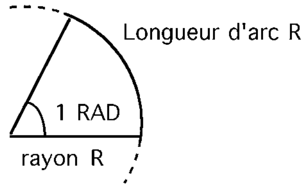
Orienter un cercle, c'est choisir un sens de parcours sur ce cercle appelé **sens direct** (ou positif) .
L'autre sens est appelé **sens indirect** (négatif ou rétrograde)

Orienter le plan*,* c'est orienter tous les cercles du plan dans le même sens.
L'usage est de choisir pour sens direct le sens contraire des aiguilles d'une montre.
(appelé aussi **sens trigonométrique**)

Un cercle trigonométrique est un cercle orienté dans le sens direct et de rayon 1.

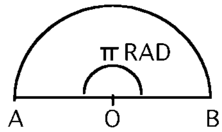


b) MESURE DES ANGLES EN RADIAN



On appelle **radian** (rad) la mesure de l'angle au centre qui intercepte, sur un cercle de rayon R , un arc de longueur R .

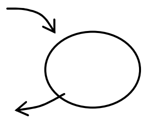
Un angle au centre plat intercepte un cercle de longueur π R . Il a donc pour mesure π radians.



Les mesures d'un angle en radian et en degré sont proportionnelles. (heureusement)

Il en découle que l 'on peut faire les conversions de mesure à l'aide d'un tableau de proportionnalité :

mesure en degré	180	360	90	45	60	30
mesure en radian	π	2π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$

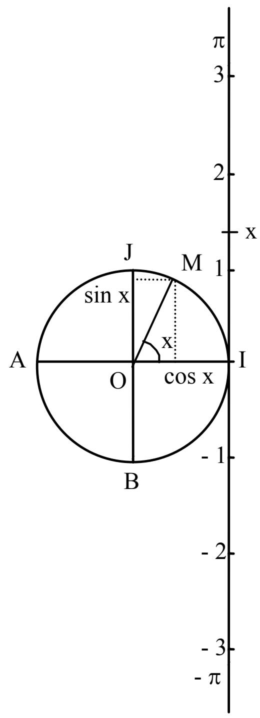


Rem :

- Le grade n'a d'intérêt que pour les géomètres.
- 1 rad = $\frac{180\,°}{\pi} \approx 57{,}3\,°$ 1° = $\frac{\pi}{180}$ rad $\approx$ 0,0175 rad
- L'arc intercepté par un angle au centre de x radians sur un cercle de rayon R a pour longueur x R .
  (Si le cercle a pour rayon 1 , alors l'arc a pour longueur x)

B) DEFINITION

Sauf contre indication, l'unité utilisée est le radian.
Dans le repère orthonormé (O ; OI , OJ), on considère le cercle trigonométrique de centre O.



A tout réel x, on associe un point M du cercle trigonométrique par enroulement de la droite des réels.
Ce point M est unique.

- l'abscisse du point M est le **cosinus** de x (noté cos x)
- l'ordonnée du point M est le **sinus** de x (noté sin x)

Ex :

$\cos 0 = 1$ et $\sin 0 = 0$; $\cos \pi = -1$ et $\sin \pi = 0$; $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ et $\sin \frac{\pi}{2} = 1$; $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$

Rem : Pour tout x réel,

- $-1 \leq \cos x \leq 1$
- $-1 \leq \sin x \leq 1$
- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ (cette dernière propriété se démontre avec le théorème de Pythagore)

On peut ainsi définir deux fonctions sur IR :

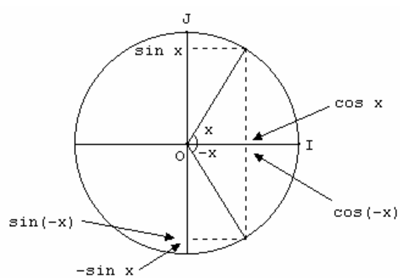
$$\cos : x \longmapsto \cos(x) \text{ et } \sin : x \longmapsto \sin(x)$$

C) PARITE

Pour tout réel x,

$$\cos(-x) = \cos x \text{ et } \sin(-x) = -\sin x$$

La fonction cos est **paire** et la fonction sin est **impaire**.



D) PERIODICITE

Pour tout réel x,

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x \text{ et } \sin(x + 2\pi) = \sin x$$

On dit que les fonctions cos et sin sont périodiques de période 2π

D'après l'enroulement, chaque réel est représenté par un point unique du cercle.
Par contre, chaque point du cercle peut être obtenu à partir d'une infinité de réels . La différence entre deux de ces réels est un multiple de 2π ...

E) VARIATIONS

On déduit ces deux tableaux du cercle trigonométrique :

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
cos	1	↘	0	↘	-1

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
sin	0	↗	1	↘	0

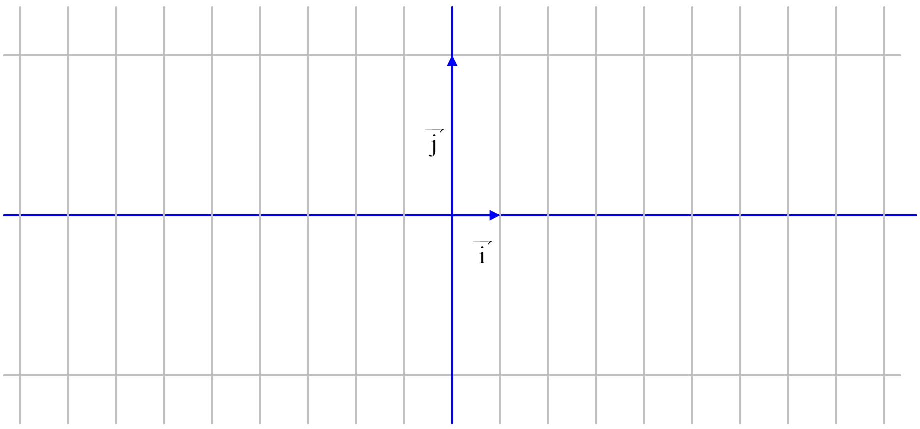
F) TRACE DE LA COURBE REPRESENTATIVE

- En établissant un tableau de valeurs, on trace les courbes représentatives des fonctions sin et cos sur $[0 ; \pi]$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

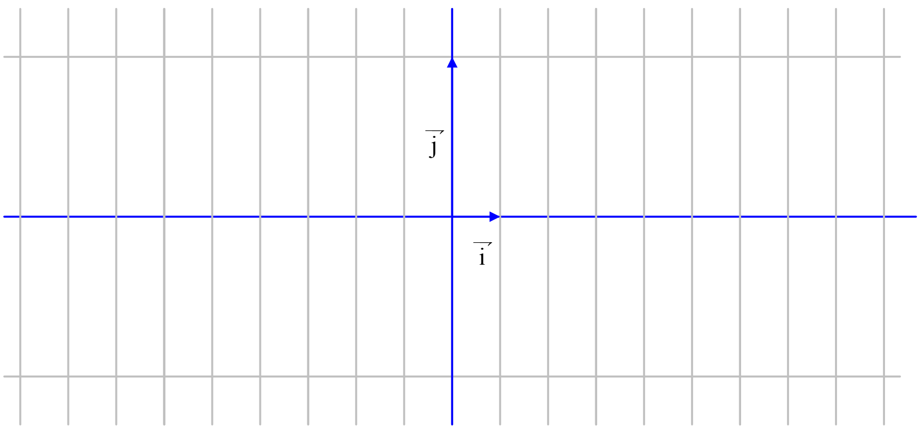
- La fonction cos est paire . On complète la courbe sur $[-\pi ; \pi]$, en utilisant la symétrie d'axe (Ox) .
- La fonction sin est impaire . On complète la courbe sur $[-\pi ; \pi]$, en utilisant la symétrie de centre O .
- Les fonctions sin et cos sont périodiques de période 2π . On complète les coubes en utilisant des translations de vecteurs $2k\pi\vec{i}$ ($k \in \mathbb{Z}$)

<u>Courbe représentative de la fonction cos :</u>

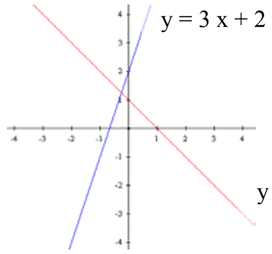
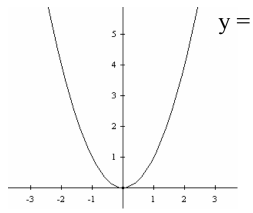
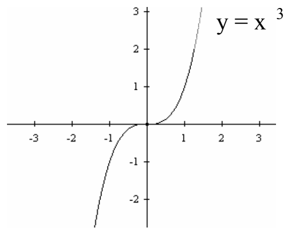
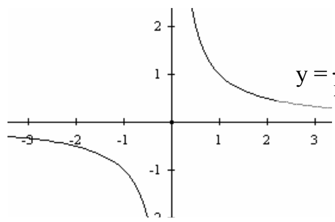
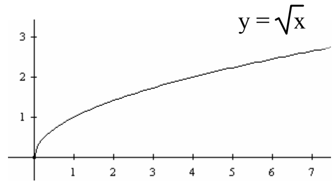
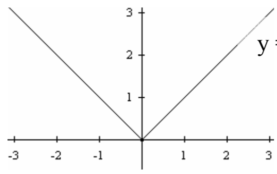
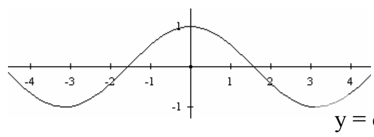
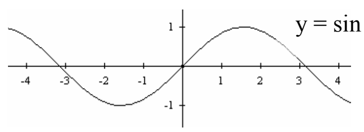


Les courbes représentant ces deux fonctions sont **<u>des sinusoïdes</u>**

<u>Courbe représentative de la fonction sin :</u>



4) PANORAMA DES FONCTIONS DE REFERENCE

Fonctions	Ensemble de définition, variations …	Représentations graphiques
$f : x \longmapsto a\,x + b$	▪ $D_f = \mathbb{R}$ ▪ Si $a > 0$ f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ ▪ Si $a < 0$ f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$	 $y = 3\,x + 2$ $y = -\,x + 1$
$f : x \longmapsto x^2$	▪ $D_f = \mathbb{R}$ ▪ f est paire ▪ f est strictement décroissante sur $]-\infty\,;\,0\,]$ et strictement croissante sur $[\,0\,;\,+\infty\,[$ ▪ La courbe représentative de f est **une parabole** de sommet O.	 $y = x^2$
$f : x \longmapsto x^3$	▪ $D_f = \mathbb{R}$ ▪ f est impaire ▪ f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$	 $y = x^3$
$f : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$	▪ $D_f = \mathbb{R}^*$ ▪ f est impaire ▪ f est strictement décroissante sur $]-\infty\,;\,0\,[$ et strictement décroissante sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$ ▪ La courbe représentative de f est **une hyperbole** de centre O.	 $y = \dfrac{1}{x}$
$f : x \longmapsto \sqrt{x}$	▪ $D_f = [\,0\,;\,+\infty\,[$ ▪ f est strictement croissante sur $[\,0\,;\,+\infty\,[$	 $y = \sqrt{x}$
$f : x \longmapsto \lvert x \rvert$	▪ $D_f = \mathbb{R}$ ▪ f est paire ▪ f est strictement décroissante sur $]-\infty\,;\,0\,]$ et strictement croissante sur $[\,0\,;\,+\infty\,[$	 $y = \lvert x \rvert$
$f : x \longmapsto \cos x$	▪ $D_f = \mathbb{R}$ ▪ f est paire ▪ f est périodique de période 2π $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ ▪ La courbe représentative de f est une **sinusoïde**	 $y = \cos x$
$f : x \longmapsto \sin x$	▪ $D_f = \mathbb{R}$ ▪ f est impaire ▪ f est périodique de période 2π $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ ▪ La courbe représentative de f est une **sinusoïde**	 $y = \sin x$