Chapitre II : Langage de la continuité – Limites

I. Les limites

a) limite en l'infini des fonctions polynômes

Propriété : Les limites en $+\infty$ ou en $-\infty$ d'une fonction polynôme est la limite en $+\infty$ ou en $-\infty$ du terme de plus haut degré,
c'est à dire : si on a une fonction polynôme $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ $(a_n \neq 0)$,
alors $\lim\limits_{x \to \pm\infty} P(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} a_n x^n$.

démonstration : Pour tout x de $\mathbb{R}^*$:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = a_n x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \times \frac{1}{x} + \frac{a_{n-2}}{a_n} \times \frac{1}{x^2} + \ldots + \frac{a_1}{a_n} \times \frac{1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n} \times \frac{1}{x^n}\right) \text{ car } a_n \neq 0.$$

Or, pour tout entier naturel p non nul, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^p} = 0$.

Donc $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \times \frac{1}{x} + \frac{a_{n-2}}{a_n} \times \frac{1}{x^2} + \ldots + \frac{a_1}{a_n} \times \frac{1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n} \times \frac{1}{x^n}\right) = 1$.

On en déduit : $\lim\limits_{x \to \pm\infty} a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = \lim\limits_{x \to \pm\infty} a_n x^n$.

Par exemple : $\lim\limits_{x \to +\infty} (3x^5 - 4x^3 + 1) = \lim\limits_{x \to +\infty} 3x^5 = +\infty$.

Exercice : f et g sont des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = -5x^2 + 5x + 3$ et $g(x) = (3 - x)(2 + x^2)$

Etudier la limite en $+\infty$ de chaque fonction.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} -5x^2 = -\infty$
- g est une fonction polynôme dont le terme de plus haut degré est $-x^3$.

Ainsi $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} -x^3 = -\infty$.

b) limite en l'infini des fonctions rationnelles

Propriété : La limite en $+\infty$ ou en $-\infty$ d'une fonction rationnelle est la limite en $+\infty$ ou en $-\infty$ du quotient des termes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur,
c'est à dire : si on a une fonction rationnelle $Q(x) = \dfrac{a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0}{b_p x^p + \ldots + b_1 x + b_0}$ $(a_n \neq 0$ et $b_p \neq 0)$.

alors $\lim\limits_{x \to \pm\infty} Q(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{a_n x^n}{b_p x^p}$.

Exercice : h et j sont des fonctions définies sur 3 par : $h(x) = \dfrac{3x^2 + 5x + 1}{x^2 + 1}$ et $j(x) = \dfrac{-x + 3}{2x^4 + 5}$

Etudier la limite en $+\infty$ de chaque fonction.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} 3 = 3$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} j(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x}{2x^4} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-1}{2x^3} = 0$

c) recherche de limites par comparaison avec des fonctions connues

Propriété 1: α désigne un nombre réel, ou $+\infty$, ou $-\infty$.
f et g sont deux fonctions définies sur un intervalle I.
Si : pour tout x de I, $f(x) \geq g(x)$ (resp. $f(x) \leq g(x)$)
et $\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) = +\infty$ (resp. $\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) = -\infty$)
alors : $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = +\infty$ (resp. $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = -\infty$).

exemple : Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction f définie sur 3^+ par : $f(x) = \sqrt{4x^2 + 1} - x$.

Pour tout x de 3^+, $4x^2 + 1 \geq 4x^2$, donc $\sqrt{4x^2 + 1} \geq 2x$.
Ainsi pour tout x de 3^+, $f(x) \geq x$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Propriété 2 : α désigne un réel, ou $+\infty$, ou $-\infty$; l désigne un réel.
f, u et v sont trois fonctions définies sur un intervalle I.
Si : pour tout x de I, $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$ et $\lim\limits_{x \to \alpha} u(x) = \lim\limits_{x \to \alpha} v(x) = l$,
alors $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = l$.
Cette propriété est couramment appelée **théorème des gendarmes**.

Exercice : f est une fonction définie sur $]0 ; +\infty[$, telle que pour tout $x > 0$, $\frac{1}{x^2} \leq f(x) \leq \frac{1}{x}$

et pour tout $x \in]0 ; 1[$, $\frac{1}{x} \leq f(x) \leq \frac{1}{x^2}$.

a) Peut-on en déduire la limite de f en $+\infty$? Si oui, la donner.
b) Peut-on en déduire la limite de f en 0 ? Si oui, la donner.

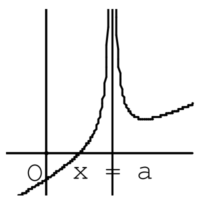
Solution : a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

b) On sait que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ et $f(x) \geq \frac{1}{x^2}$ pour tout $x \in]0 ; +\infty[$ donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$.

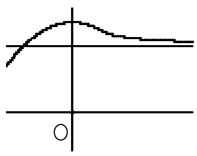
II. Les Asymptotes

a) asymptotes verticales & horizontales

f est une fonction définie sur un intervalle I, C est sa courbe représentative dans un repère orthogonal. a et m désignent des réels.



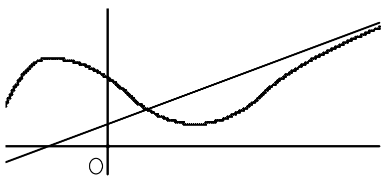
- Si f admet une limite infinie en a, alors la droite d'équation $x = a$ est une asymptote à C parallèle à l'axe des ordonnées.



- Si f admet une limite finie m en $+\infty$ ou en $-\infty$, alors la droite d'équation $y = m$ est une asymptote à C parallèle à l'axe des abscisses.

b) asymptotes obliques

- Une droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe représentative de f si $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ ou si $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$.



La connaissance du signe de $f(x) - (ax + b)$ permet de préciser la position de la courbe représentative de la fonction et de la droite.

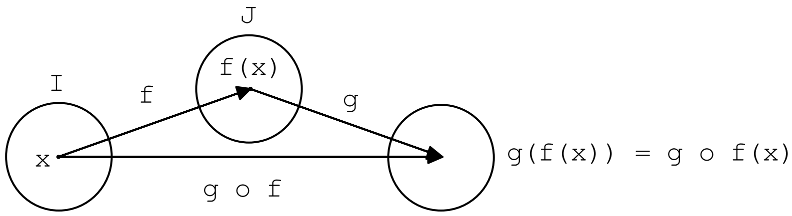
Exemple : Soit f une fonction définie sur 3 \{0} par $f(x) = 2x - 3 - \dfrac{4}{x}$

$f(x) - (2x - 3) = -\dfrac{4}{x}$; $\lim\limits_{x \to -\infty} -\dfrac{4}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} -\dfrac{4}{x} = 0$,
donc la droite d'équation $y = 2x - 3$ est asymptote oblique à la courbe représentative de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

III. Fonction composée et limite

a) définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, à valeurs dans un intervalle J et g une fonction définie sur J.
La **fonction composée de *f* suivie de *g*** est la fonction notée $g \circ f$, définie sur I par :
pour tout x de I, $g \circ f(x) = g[f(x)]$.



Remarque : en général : $f \circ g \neq g \circ f$.

Exemple : Soient f et g les fonctions définies sur 3 par :
$f(x) = x^2 - 2x + 1$ et $g(x) = 3x - 2$

- Pour tout x réel, $f \circ g(x) = f(3x - 2) = (3x - 2)^2 - 2(3x - 2) + 1$
  $= 9x^2 - 18x + 9$
- Pour tout x réel, $g \circ f(x) = g(x^2 - 2x + 1) = 3(x^2 - 2x + 1) - 2 = 3x^2 - 6x + 1$

b) sens de variation

En se plaçant sur un intervalle I où la fonction composée $g \circ u$ existe :

- Si les deux fonctions ont même sens de variation, alors leur composée est croissante sur I ;
- Si les deux fonctions sont de sens de variation contraires, alors leur composée est décroissante sur l'intervalle I.

c) limites de fonctions composées

Propriété : α, l et l' désignent des nombres réels, ou $+\infty$, ou $-\infty$.
Soient u et v deux fonctions.
Si $\lim\limits_{x \to \alpha} u(x) = l$ et si $\lim\limits_{x \to l} v(x) = l'$, alors : $\lim\limits_{x \to \alpha} v \circ u(x) = l'$.

Exemple : Etude de la limite en $\dfrac{1}{3}$ de la fonction f définie sur $]\dfrac{1}{3} ; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3x - 1}}$.

Posons $X = 3x - 1$, alors $X > 0$ car $x > \dfrac{1}{3}$ et $f(X) = \dfrac{1}{\sqrt{X}}$.

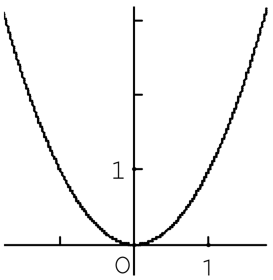
Nous savons que $\lim\limits_{x \to \frac{1}{3}} X = 0$ et $\lim\limits_{X \to 0} \dfrac{1}{\sqrt{X}} = +\infty$.

Donc $\lim\limits_{x \to \frac{1}{3}} f(x) = +\infty$.

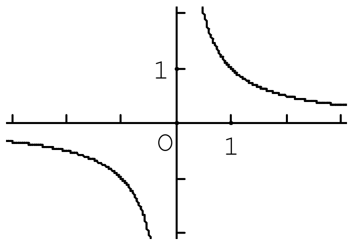
IV. Continuité – Théorème des valeurs intermédiaires

f est une fonction définie sur un intervalle I de 3. Lorsque la courbe représentative de *f* ne présente pas de « saut », c'est à dire **lorsque cette courbe se trace d'un seul tenant sans lever le crayon**, on dit que ***f* est continue sur I**.

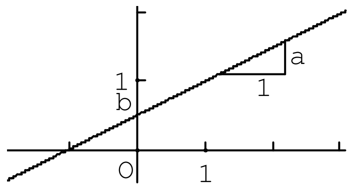
a) exemples de fonctions continues



La fonction carrée $x \mapsto x^2$ est continue sur 3.



La fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $]0\,;+\infty[$ et sur $]-\infty\,;0[$.



Une fonction affine $x \mapsto ax + b$ est continue sur 3.

Propriété :

- Les fonctions de référence (fonctions affines, carré, inverse, racine carrée) sont continues sur chaque intervalle de leur ensemble de définition.
- Les fonctions polynômes sont continues sur 3.
- Les fonctions rationnelles sont continues sur chaque intervalle de leur ensemble de définition.

exemples :

1) La fonction *f* définie sur 3 par $f(x) = 3x^4 - 5x^2 + x - 9$ est continue sur 3.
2) La fonction *f* définie sur 3 \ {2} par $f(x) = \dfrac{4x-1}{x-2}$ est continue sur $]-\infty\,;2[$ et sur $]2\,;+\infty[$.

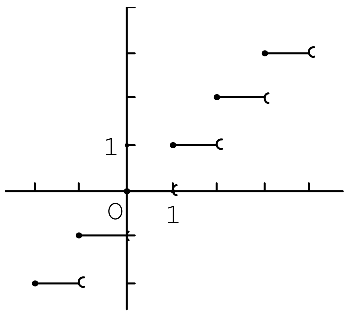
b) contre-exemple : la fonction partie entière

Définition : la fonction partie entière est la fonction définie sur 3, qui, à tout réel *x*, associe l'entier relatif *n* tel que $n \leq x < n + 1$. On note E cette fonction partie entière.

Par exemple : $E(2) = 2$ car $2 \leq 2 < 3$; $E(5,8) = 5$ car $5 \leq 5,8 < 6$
$E(-1) = -1$ car $-1 \leq -1 < 0$; $E(-2,3) = -3$ car $-3 \leq -2,3 < 2$

Représentation graphique de E

Soit $n \in$ ς, pour tout $x \in [n\,;n+1[$, $E(x) = n$. Donc, sur $[n\,;n+1[$, on trace le segment de droite d'équation $y = n$.

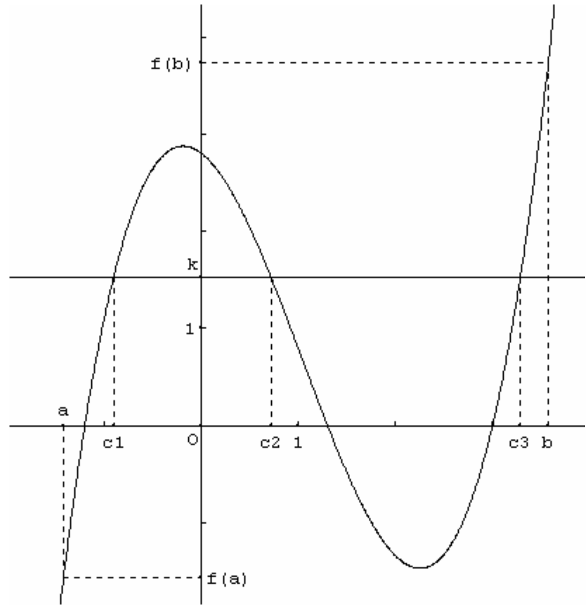


Remarque :

E n'est pas continue sur 3, car pour tracer sa courbe, il faut lever le crayon aux points d'abscisses 1, 2, 3 … et plus généralement en chaque point d'abscisse entière.

c) Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 1: Si une fonction f est continue sur un intervalle fermé $[a\ ;\ b]$, et si k est un réel quelconque situé entre $f(a)$ et $f(b)$ (ces deux valeurs comprises), alors il existe au moins un nombre c dans $[a\ ;\ b]$ tel que $f(c) = k$.



Théorème 2 : Si une fonction f est continue et strictement monotone sur un intervalle fermé $[a\ ;\ b]$, alors pour tout réel k situé entre $f(a)$ et $f(b)$ (ces deux valeurs comprises), l'équation $f(x) = k$ admet une **solution unique**.

Exercice : f est la fonction définie sur l'intervalle [-3 ; 6] par $f(x) = x^3 - 12x$.

a) Déterminer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f.

b) Pourquoi l'équation $f(x) = 30$ a-t-elle des solutions dans l'intervalle [-3 ; 6] ?

c) Combien cette équation a-t-elle de solutions ?

d) En donner une approximation d'amplitude 10^{-2}, en utilisant la calculatrice.

Solution :

a) f est une fonction polynôme, elle est donc dérivable sur [-3 ; 6].

Pour tout $x \in [-3\ ;\ 6]$, $f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4) = 3(x - 2)(x + 2)$.

d'où, d'après la propriété sur le signe d'un trinôme, $f'(x) > 0$ pour $x \in [-3\ ;\ -2[\cup]2\ ;\ 6[$.

et $f'(x) < 0$ pour $x \in\ ]-2\ ;\ 2[$.

On en déduit le tableau de variation de f :

x	-3		-2		2		6
$f'(x)$		+	0	–	0	+	
f	9	↗	16	↘	-16	↗	144

b) $f(-3) = 9$, $f(6) = 144$ et $9 \leq 30 \leq 144$.

La fonction f est une fonction polynôme, elle est alors continue sur 3 et en particulier sur [-3 ; 6] ; de plus 30 est compris entre $f(-3)$ et $f(6)$.

Le théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer que l'équation $f(x) = 30$ a au moins une solution dans l'intervalle [-3 ; 6].

c) f est croissante sur [-3 ; -2] et décroissante sur [-2 ; 2], elle admet alors un minimum local en -2 qui est $f(-2) = 16$. L'équation $f(x) = 30$ n'admet donc pas de solution sur [-3 ; 2].

De plus, f est strictement croissante sur [2 ; 6] et $f(2) \leq 30 \leq f(6)$, l'équation $f(x) = 30$ admet donc une unique solution dans l'intervalle [2 ; 6].

d) On tabule $f(x)$ sur l'intervalle [2 ; 6] avec le pas 0,01 et on observe que : $f(4{,}34) \leq 30 \leq f(4{,}35)$.

Donc un encadrement d'amplitude 10^{-2} de la solution x_0 est $4{,}34 \leq x_0 \leq 4{,}35$.