Chapitre 2 : Ordre et intervalles dans $\mathbb{R}$

I. Ordre et comparaison

1) Ordre et addition

Propriété : Si $a < b$, alors $a + c < b + c$ et $a - c < b - c$

Autrement dit, ajouter (ou soustraire) un même nombre à chaque membre d'une inégalité ne change pas le sens de l'inégalité.

Propriété : Si $a < b$ et $c < d$, alors $a + c < b + d$.

En effet, si $a < b$, alors $a + c < b + c$.
De plus, si $c < d$, alors $b + c < b + d$. On en déduit $a + c < b + d$.

2) Ordre et multiplication

Propriété : Si $a < b$ et $c > 0$, alors $ac < bc$ et $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.

Si $a < b$ et $c < 0$, alors $ac > bc$ et $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.

Autrement dit, multiplier (ou diviser) chaque membre d'une inégalité,
- par un même nombre **strictement positif, ne change pas** le sens de l'inégalité.
- par un même nombre **strictement négatif, change** le sens de l'inégalité.

Propriété : Si a, b, c et d sont des réels **positifs** tels que $a < b$ et $c < d$, alors $ac < bd$.

En effet, si $a < b$, alors $ac < bc$ car $c > 0$.
De plus, si $c < d$, alors $bc < bd$ car $d > 0$. On en déduit : $ac < bd$.

3) Ordre et Encadrement

Définition : Soient a, b et x trois nombres réels. On dit que a et b encadrent x lorsque $a \leq x \leq b$.

Exercice : x est un réel tel que $-1 < x < 2$. On pose $B = -2x - 3$.
Trouver un encadrement de B.

II. Inégalités sur les carrés, les racines carrées, les inverses

1) Passage au carré

Propriété : a et b étant deux nombres positifs distincts, $a < b$ équivaut à $a^2 < b^2$.

démonstration : On sait que $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. Comme a et b sont positifs, $a + b$ est aussi positif et on en déduit que $a - b$ et a^2 et b^2 sont de même signe. D'où
- si $a < b$, alors $a - b < 0$ donc $a^2 - b^2 < 0$ et $a^2 < b^2$.
- si $a^2 < b^2$, alors $a^2 - b^2 < 0$ donc $a - b < 0$ et $a < b$.

Autrement dit, deux nombres positifs sont rangés dans le même ordre que leurs carrés.

2) Passage à la racine carrée

Propriété : deux nombres positifs et leurs racines carrées sont rangés dans le même ordre.

Donc $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ équivaut à $a < b$.

démonstration : …

Autrement dit, deux nombres positifs sont rangés dans le même ordre que leurs racines carrées.

3) Passage à l'inverse

Propriété : a et b étant deux nombres strictement positifs, $a < b$ équivaut à $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

Démonstration : $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ équivaut à $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} > 0$. Or $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab}$ et $ab > 0$, car $a > 0$ et $b > 0$.

Donc $\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$ et $b - a$ sont de même signe. Donc $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} > 0$ équivaut à $b - a > 0$, c'est à dire $a < b$.

Autrement dit, deux nombres strictement positifs sont rangés dans l'ordre contraire de leur inverse.

Exercice : x est un réel tel que $2 < x < 5$. Donner un encadrement de $A = x + \frac{1}{x}$.

4) Comparaison de a, a² et a³ lorsque a > 0

Propriété : a est un réel strictement positif.

1. Si $a > 1$, alors $a^3 > a^2 > a$;
2. si $a < 1$, alors $a^3 < a^2 < a$.

Démonstration : De l'hypothèse $a > 1$, on déduit d'une part que $a^2 > a$ (on multiplie les deux membres par $a > 0$) et d'autre part que $a^3 > a^2$ (on multiplie par $a^2 > 0$). Donc $a^3 > a^2 > a$.
De la même façon, lorsque $0 < a < 1$, on démontre que $a^3 < a^2 < a$.

Remarque : pour $a = 0$ et $a = 1$, $a = a^2 = a^3$.

Exercice : x est un réel tel que $3 < x < 4$. On pose $A = 4 - x$.
Comparer les nombres A, A^2 et A^3. (*cf* **Module**)

Compléter le tableau suivant en vous aidant de votre calculatrice

a	a²	a^3	$\frac{1}{a}$	Classer les valeurs trouvées dans l'ordre croissant
1				
2				
10				
0,3				
4				
0.8				
2,9				
0,99				
0,01				

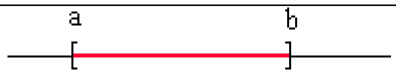
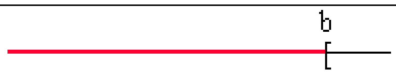
Dans quelle situation peut-on dire que a>a²> a^3 ? Dans quelle situation peut-on dire que a<a²< a^3 ?

Dans quelle situation peut-on dire que a>$\frac{1}{a}$? Dans quelle situation peut-on dire que a<$\frac{1}{a}$?

III. Intervalles de ℝ

1) Définitions

Les intervalles réels sont des **parties de ℝ**
Dans le tableau ci-dessous, a et b sont deux réels tels que a ≤ b.

Notation	**Représentation sur la droite réelle**	**Ensemble des réels x tels que**
[a ; b]		$a \leq x \leq b$
[a ; b [		$a \leq x < b$
] a ; b]		$a < x \leq b$
] a ; b [		$a < x < b$
] – ∞ ; b]		$x \leq b$
] – ∞ ; b [		$x < b$
[a ; + ∞ [		$a \leq x$
] a ; + ∞ [		$a < x$

Vocabulaire:
[a ; b],]a ; b[,]a ; b] et [a ; b[sont des intervalles d'**extrémités** a et b ($a < b$). Le **centre** de l'intervalle est le nombre $\frac{a+b}{2}$, et sa **longueur** est $b - a$.

Remarques :

- Le fait de dire qu'un intervalle est ouvert en b signifie que le réel b ne fait pas partie de celui-ci. Par contre, s'il y avait été fermé alors il en aurait fait partie.
- Les deux réels qui délimitent un intervalle sont appelés bornes de l'intervalle.
- La notation + ∞ se lit "plus l'infini".
- – ∞ (moins l'infini) et +∞ (plus l'infini) ne sont pas des nombres, ce sont des symboles. Du côté de – ∞ et de + ∞, le crochet est toujours ouvert, par convention.
- L'ensemble des réels ℝ se note aussi]– ∞ ; + ∞[.

2) Réunion et intersection

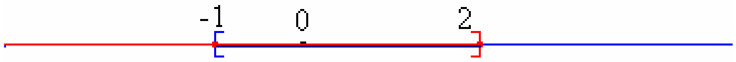
Définition :

- L'intersection de deux intervalles est l'ensemble des nombres réels appartenant à la fois aux deux intervalles.
- La réunion de deux intervalles est l'ensemble des nombres réels appartenant à l'un ou l'autre de ces intervalles (les éléments de l'intersection appartiennent aussi à la réunion).

Exemples :

- $[2\,;5] \cap [4\,;6] = [4\,;5]$ et $[2\,;5] \cup [4\,;6] = [2\,;6]$.

- $]-\infty\,;2] \cap [-1\,;+\infty[= [-1\,;2]$ et $]-\infty\,;2] \cup [-1\,;+\infty[=]-\infty\,;+\infty[= \mathbb{R}$



IV. Valeur absolue

1) Distance entre deux réels

Définition : La **distance** entre deux réels x et y est la différence entre le plus grand et le plus petit. Cette distance est notée $|x - y|$ ou encore $|y - x|$.
$|x - y|$ se lit « valeur absolue de x moins y ».

Exemples :
- $|3 - 5|$ est la distance entre les réels 3 et 5. Cette distance est égale à $5 - 3 = 2$.
- $|-2 - 3|$ est la distance entre les réels –2 et 3. Cette distance est égale à $3 - (-2) = 5$.

2) Valeur absolue d'un réel

Lorsque $y = 0$, $|x - y| = |x|$. Le nombre réel $|x|$ est alors la distance entre x et 0.

Donc : $|x| = \begin{cases} x & \text{lorsque } x \geq 0 \\ -x & \text{lorsque } x < 0 \end{cases}$

Exemples : $|5| = 5$ car 5 est un nombre positif. $|-3| = 3$ car -3 est un nombre négatif.
Si x est un nombre réel, $|x^2| = x^2$ car $x^2 \geq 0$.

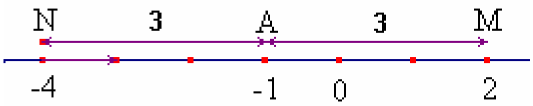
Propriétés :
1. Dire que $|x| = 0$ équivaut à dire que $x = 0$.
2. $|-x| = |x|$.
3. Dire que $|x| = |y|$ équivaut à dire que $x = y$ ou $x = -y$.

3) Equation avec les valeurs absolues

Propriété : a est un réel, r est un réel strictement positif.
Dire que $|x - a| = r$ équivaut à dire que $x = a - r$ ou $x = a + r$.

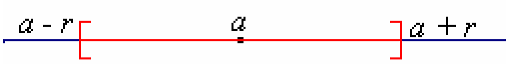
Ex : Trouver tous les nombres x tels que $|x + 1| = 3$.

S = { 2 ; – 4}



4) Inéquation avec les valeurs absolues

Propriété : a est un réel, r est un réel strictement positif.
Dire que $|x - a| \leq r$ équivaut à dire que x appartient à l'intervalle $[a - r\,;a + r]$.



Ex : Trouver tous les nombres x tels que $|x + 1| \leq 3$.

S = [2 ;- 4]