Les Probabilités ($1^{ère}$ Partie)

I. Vocabulaire des probabilités

1) Généralités

- En général, on note Ω l'ensemble des évènements élémentaires (ou **univers**) d'une expression aléatoire.

  Exemple : on lance un dé non pipé et on note le chiffre apparu : $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$.

- En général, on note e_1, e_2, …, e_n, les évènements élémentaires.
  Lorsqu'on associe à chaque évènement élémentaire un nombre $P(e_i)$, appelé probabilité de e_i, tel que pour tout i, $\boxed{0 \leq P(e_i) \leq 1}$, et $\boxed{P(e_1) + P(e_2) + \ldots + P(e_n) = 1}$,
  on dit qu'on définie une **probabilité** sur Ω.

  Exemple : Lancer du dé non pipé : $P(1) = \frac{1}{6}$, $P(2) = \frac{1}{6}$, … , $P(6) = \frac{1}{6}$.

- Un **événement** A est un sous-ensemble de Ω. La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent. $\boxed{P(\varnothing) = 0 \quad \text{et} \quad P(\Omega) = 1}$.

  Exemple : Lancer du dé. Le sous-ensemble $A = \{2 ; 4 ; 6\}$, correspond à l'événement « le chiffre apparu est pair » et $P(A) = P(2) + P(4) + P(6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$.

- Lorsque tous les évènements élémentaires ont la même probabilité, on dit que l'on est dans une situation d'**équiprobabilité**.

2) Propriétés

Propriété 1 : Lorsqu'on est dans une situation d'équiprobabilité et que le nombre d'éléments de Ω est n,

- la probabilité de chaque événement élémentaire est $\frac{1}{n}$,
- pour tout événement A, $\boxed{P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}}$.

Propriété 2 :

a) évènements contraires A et $\overline{A}$

$\overline{A}$ est l'ensemble de tous les évènements élémentaires qui ne sont pas dans A. $\boxed{P(A) + P(\overline{A}) = 1}$.

b) Evènements $A \cap B$ et $A \cup B$

$A \cap B$, c'est à dire « A et B », est l'évènement constitué des évènements élémentaires qui sont à la fois dans A et dans B.

$A \cup B$, c'est à dire « A ou B », est l'événement constitué des évènements élémentaires qui sont dans l'un au moins des évènements A, B.

Propriété 3 :

Pour tout événement A et B on a : $\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$.

Si A et B sont **incompatibles**, $P(A \cap B) = 0$, et $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

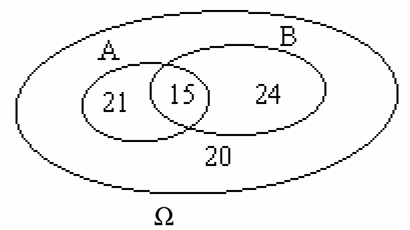
Propriété 3 : **Partition** de D

Si A_1, A_2 et A_3 forment une partition de D, alors $P(D) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)$.
Cette propriété se généralise à un nombre quelconque d'évènements formant une partition de D.

Exercice 1 : Parmi les 80 filles qui étaient en classe de Terminale au Lycée des Iles il y a dix ans :
36 sont aujourd'hui salariées ; 39 sont mères de famille ; 15 sont salariées et mères de famille. On choisit au hasard une de ces 80 femmes. Considérons les évènements A : « la femme choisie est salariée » et B : « la femme choisie est mère de famille ».
Quelle est la probabilité pour que la femme ne soit ni salariée ni mère de famille ?

Solution 1 :

Utilisons le diagramme ci-dessous appelé diagramme de Venn.
Le premier nombre placé est 15 qui constitue le cardinal de $A \cap B$. On en déduit ensuite $21 = 36 - 15$ et $24 = 39 - 15$. La somme de ces trois nombres $(15 + 21 + 24 = 60)$ constitue le cardinal de $A \cup B$.
On en déduit enfin que le nombre de femmes qui ne sont ni salariées ni mères de familles est $80 - 60 = 20$.



Comme nous sommes en situation d'équiprobabilité, la probabilité demandée est $\frac{20}{80} = \frac{1}{4}$.

Solution 2 :

On peut remarquer que l'événement « la femme choisie n'est ni salariée ni mère de famille » est l'événement contraire de $A \cup B$.

Or $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{36}{80} + \frac{39}{80} - \frac{15}{80} = \frac{60}{80} = \frac{3}{4}$

On en déduit que $P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$.

II. Probabilités conditionnelles

1) Exemple

Dans un lycée de 1000 élèves, 45% des élèves sont des filles, 55% des garçons. Parmi les filles, 30% sont internes et 70% externes. Parmi les garçons, 60% sont internes et 40% externes.
Si on tire au hasard une fiche dans le fichier des filles du lycée, la probabilité que ce soit la fiche d'une interne est égale à $\frac{30}{100}$.
Calculons la probabilité de tirer, dans le fichier de tous les élèves du lycée, une fiche d'une fille externe. Elle est égale à la fraction $\frac{\text{nombre de filles externes}}{\text{nombre total d'élèves}}$, c'est à dire $\frac{315}{1000} = 0{,}315$.
On peut constater que le nombre 0,315 est le produit : $\frac{45}{100} \times \frac{70}{100}$.
Ainsi, on peut écrire : $P(F \cap E) = P(F) \times P_F(E)$ en notant $P_F(E)$ la probabilité d'obtenir une fiche « externe » sachant qu'il s'agit d'une fiche « fille ».

2) Généralisation

Définition :

Si $P(A) \neq 0$, on appelle probabilité conditionnelle de B sachant A le nombre, noté $P_A(B)$ ou $P(B/A)$, défini par $\boxed{P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}$.

Cette égalité s'écrit également : $\boxed{P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A)}$.

Remarque : lorsque $P(B) \neq 0$, on a aussi $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, ce que l'on peut écrire $P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A)$.Ainsi, si $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$, on a $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = P(B) \times P_B(A)$.

Propriété :

Etant donnés deux événements quelconques, A et B, relatifs à une même épreuve :

$\boxed{P_A(B) + P_A(\overline{B}) = 1}$.

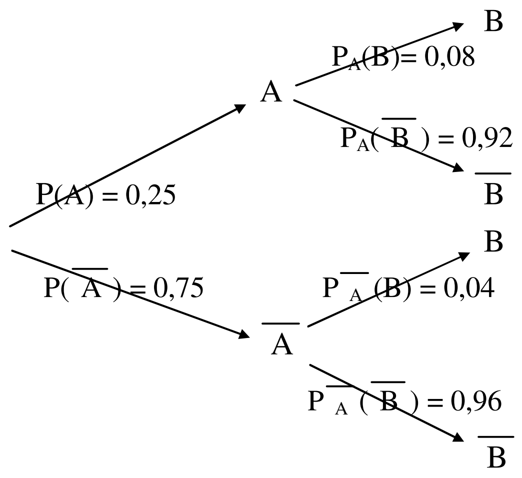
3) Arbres pondérés

Exemple 1 :

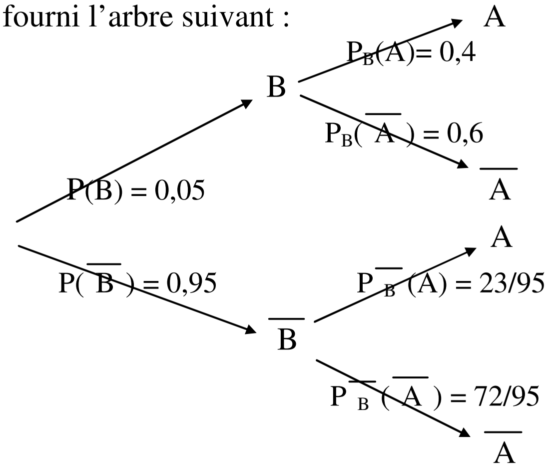
On choisit au hasard une personne de la population décrite ci-dessous :

	Malades	Sains
Fumeurs	400	4600
Non fumeurs	600	14400

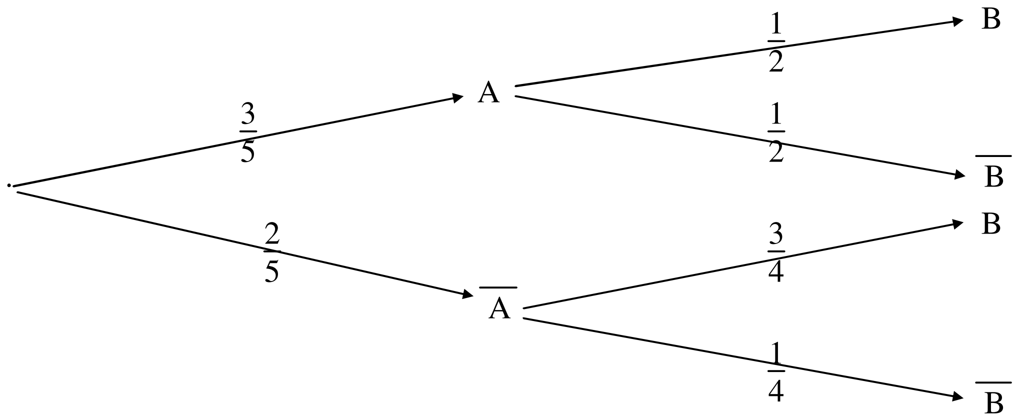
A est l'évènement : « la personne fume » ;
B est l'évènement : « la personne est malade ».



On pourrait échanger les rôles de A et B, ce qui fourni l'arbre suivant :



Exemple 2 :
Une urne contient trois boules rouges et deux boules vertes. On tire deux boules au hasard successivement sans remise.
A est l'évènement : « la première boule tirée est rouge » ;
B est l'évènement : « la deuxième boule tirée est rouge ».



Règle des nœuds
La somme des probabilités affectées aux branches issues d'un même nœud est égale à 1.

III. Evènements indépendants

Définition :
Dire que deux événements A et B sont indépendants signifie que : $\boxed{P(A\cap B) = P(A) \times P(B)}$

Remarque : Supposons que $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$.
Si $P(A\cap B) = P(A) \times P(B)$, nous obtenons $P_A(B) = P(B)$ et $P_B(A) = P(A)$.

Propriété :
Si deux évènements B et A sont indépendants, alors :
1) les évènements $\overline{B}$ et A sont indépendants ;
2) les évènements B et $\overline{A}$ sont indépendants ;
3) les évènements $\overline{B}$ et $\overline{A}$ sont indépendants.

Exercice : On fait l'hypothèse que chacun des moteurs d'un avion bi-moteur tombe en panne avec une probabilité égale à 0,000 1 et ceci d'une façon indépendante l'un de l'autre.
Quelle est la probabilité que l'avion arrive à bon port sachant qu'il peut voler avec un seul moteur ?

Solution : On note A l'événement : « le premier moteur tombe en panne », B l'événement « le deuxième moteur tombe en panne » et C l'événement « l'avion arrive à bon port ».

On veut calculer P(C), or $C = \overline{A\cap B}$.

Les deux évènements A et B étant indépendants, la probabilité que les deux moteurs tombent en panne pendant le même vol est : $P(A\cap B) = P(A) \times P(B) = 0{,}0001^2 = 10^{-8}$.
La probabilité que l'avion arrive à bon port est donc $P(C) = 1 - 10^{-8} = 0{,}99999999$.

IV. Formule des probabilités totales

1) Exemple

Une urne contient 10 boules : 2 bleues, 5 noires, 3 rouges.
On effectue deux tirages successifs sans remise. On peut représenter cette situation par un arbre.
On se propose de calculer la probabilité de l'événement « tirer une boule bleue au deuxième tirage ».
On note B_2 cet événement, et :
B_1 : « tirer une boule bleue au premier tirage »,
N_1 : « tirer une boule noire au premier tirage »,
R_1 : « tirer une boule rouge au premier tirage ».
Trois situations sont possibles pour obtenir l'événement B_2 : « B_1 et B_2 », « N_1 et B_2 » et « R_1 et B_2 »
Donc $P(B_2) = P(B_1 \cap B_2) + P(N_1 \cap B_2) + P(R_1 \cap B_2)$

$$P(B_2) = P(B_1) \times P_{B_1}(B_2) + P(N_1) \times P_{N_1}(B_2) + P(R_1) \times P_{R_1}(B_2)$$

Ainsi : $P(B_2) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{9} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{9} + \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} = \frac{1}{45} + \frac{1}{9} + \frac{1}{15} = \frac{9}{45} = \frac{1}{5}$.

2) Cas général

Ω est l'ensemble des évènements élémentaires d'une expérience aléatoire.
$A_1, A_2, \dots, A_n$ désignent des sous-ensembles de Ω.
Dire que $A_1, A_2, \dots, A_n$ forment une partition de Ω signifie que les A_i sont deux à deux disjoints et que $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$.
Avec cette définition, on peut énoncer le théorème suivant.

Propriété : Formule des probabilités totales
$A_1, A_2, \dots, A_n$ forment une partition de Ω.
Alors la probabilité d'un événement quelconque B est donné par :

$$\boxed{P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \dots + P(B \cap A_n)}$$

c'est à dire, lorsque $P(A_i) \neq 0$ pour tout i :

$$\boxed{P(B) = P(A_1) \times P_{A_1}(B) + P(A_2) \times P_{A_2}(B) + \dots + P(A_n) \times P_{A_n}(B).}$$

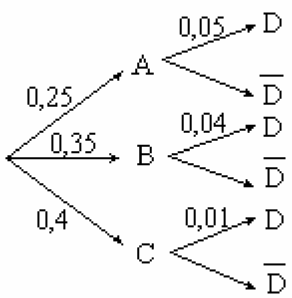
3) Exercice d'application

Dans une usine d'automobiles, trois chaînes « a », « b » et « c » fournissent respectivement 25%, 35% et 40% de la production de moteurs.
Certains de ces moteurs sont écartés comme défectueux, dans les proportions suivantes :
5% pour la chaîne « a », 4% pour la chaîne « b » et 1% pour la chaîne « c ».
On prend un moteur au hasard et on définit les évènements suivants :
A : « Le moteur est issu de la chaîne « a » » ; B : « Le moteur est issu de la chaîne « b » » ;
C : « Le moteur est issu de la chaîne « c » » ; D : « Le moteur est défectueux ».
Les résultats sont donnés à 10^{-4} près.

1. Traduire les données de l'énoncé en utilisant les notations des probabilités et tracer un arbre pondéré illustrant la situation.
2. Calculer P(D).
3. Quelle est la probabilité qu'un moteur sorte de la chaîne « a » sachant qu'il est défectueux ?
4. Calculer la probabilité qu'un moteur sorte de la chaîne « c » sachant qu'il n'est pas défectueux ?

Solution :

1. Les renseignements donnés par le texte sont les suivants :
$P(A) = 0,25$; $P(B) = 0,35$; $P(C) = 0,4$; $P_A(D) = 0,05$; $P_B(D) = 0,04$; $P_C(D) = 0,01$.



2. Utilisons la formule des probabilités totales pour calculer P(D) :
$P(D) = P(D \cap A) + P(D \cap B) + P(D \cap C)$

$$= P(A) \times P_A(D) + P(B) \times P_B(D) + P(C) \times P_C(D)$$
$$= 0,25 \times 0,05 + 0,35 \times 0,04 + 0,4 \times 0,01 = 0,0125 + 0,014 + 0,0004$$

Donc : **P(D) = 0,0305.**