PUISSANCES D'EXPOSANTS REELS, FONCTIONS PUISSANCES, CROISSANCES COMPAREES

1) PUISSANCES D'EXPOSANTS REELS

A) La notation a^x

Si n est un entier naturel, la notation a^n a un sens pour tout réel a . Dans le cas où n est un entier négatif, la notation a^n a un sens pour tout réel a non nul car $a^n = \dfrac{1}{a^{-n}}$. On se propose de donner un sens à la notation a^b quand b est un réel quelconque.

Définition

Soit b un réel et a un réel strictement positif.
a exposant b (ou a puissance b) est le réel noté a^b défini par :

$$a^b = e^{b \ln a}$$

Cette définition est cohérente avec celle de a^n lorsque a est un réel strictement positif et n un entier . En effet :

$$e^{n \ln a} = e^{\ln(a^n)} = a^n$$

Propriétés

Soit a et a', deux réels strictement positifs, b et b' deux réels quelconques . On a :

- $\ln(a^b) = b \ln a$
- $a^{b+b'} = a^b a^{b'}$
- $1^b = 1$
- $a^{-b} = \dfrac{1}{a^b}$
- $a^{b-b'} = \dfrac{a^b}{a^{b'}}$
- $(a a')^b = a^b a'^b$
- $(a^b)^{b'} = a^{bb'}$

Preuve partielle : *(on ne va démontrer que la deuxième égalité)*

$a^{b+b'} = e^{(b+b')\ln a} = e^{b \ln a + b' \ln a} = e^{b \ln a} \times e^{b' \ln a} = a^b a^{b'}$

B) Les fonctions exponentielles de base a

Définition

Soit a un réel strictement positif.
On appelle fonction exponentielle de base a la fonction notée $\exp_a$ définie sur IR par :

$$\exp_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto a^x = e^{x \ln a}$$

- La fonction exponentielle de base 1, $\exp_1 : x \longmapsto 1^x$ est constante et vaut 1.
- La fonction exponentielle de base e , $\exp_e : x \longmapsto e^x$ est la fonction exponentielle déjà étudiée.

Propriétés

Soit a un réel strictement positif.

- La fonction $\exp_a$ est dérivable et continue sur IR et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.
- Pour tout réel x , $\exp'_a(x) = \ln a \times \exp_a(x) = a^x \ln a$.

Preuve :

Pour tout réel x, $\exp_a(x) = e^{u(x)}$ avec $u(x) = x \ln a$.
u est dérivable sur IR et pour tout réel x , on a $u'(x) = \ln a$
On en déduit que $\exp_a$ est dérivable (et donc continue) sur IR et pour tout réel x , on a :

$$\exp'_a(x) = \ln a \times e^{x \ln a} = \ln a \times \exp_a(x) = a^x \ln a .$$

Pour tout réel x , $a^x > 0$, donc $\exp'_a(x)$ est du signe de $\ln a$. Ainsi :

- si $a > 1$, $\exp_a$ est strictement croissante sur IR
- si $0 < a < 1$, $\exp_a$ est strictement décroissante sur IR

Tableaux de variations :

$a > 1$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \exp_a(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \exp_a(x) = 0$

L'axe des abscisses est asymptote horizontale en -∞

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$\exp'_a(x)$	+
$\exp_a$	0 ↗ $+\infty$

$0 < a < 1$

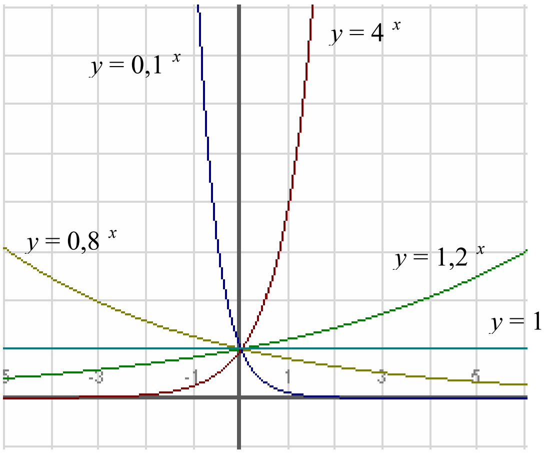
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \exp_a(x) = 0$

L'axe des abscisses est asymptote horizontale en +∞

- $\lim\limits_{x \to -\infty} \exp_a(x) = +\infty$

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$\exp'_a(x)$	–
$\exp_a$	$+\infty$ ↘ 0

Représentations graphiques :



Remarques :

- Toutes les courbes passent par le point de coordonnées (0 ; 1).
- La fonction $\exp_a$ est la fonction réciproque de la fonction logarithme $\log_a$.
  On a :
  - pour tout réel x strictement positif, $\exp_a(\log_a(x)) = x$
  - pour tout réel x , $\log_a(\exp_a(x)) = x$.
  - Les courbes représentatives, dans un repère orthonormé, des fonctions $\exp_a$ et $\log_a$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

2) FONCTIONS PUISSANCES

A) Cas où *n* est un entier strictement positif

Propriété

Soit n un entier strictement positif et f_n la fonction définie sur IR par $f_n(x) = x^n$

- Si n est pair f_n est paire, décroissante sur] -∞ ; 0] et croissante sur [0 ; +∞ [.
- Si n est impair f_n est impaire et croissante sur IR.

Tableaux de variations :

n pair

$\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} x^n = +\infty$

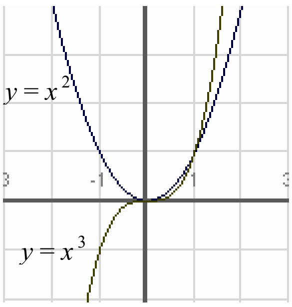
x	-∞		0		+∞
$f_n'(x)$		–	0	+	
f_n	+∞	↘	0	↗	+∞

n impair

$\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} x^n = -\infty$

x	-∞		0		+∞
$f_n'(x)$		+	0	+	
f_n	-∞	↗	0	↗	+∞

Représentations graphiques :



Remarque :

Toutes les courbes passent par O et par le point de coordonnées (1 ; 1).

B) Cas où *n* est un entier strictement négatif

Propriété

Soit n un entier strictement négatif et f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f_n(x) = x^n$

- Si n est pair f_n est paire, croissante sur] -∞ ; 0 [et décroissante sur] 0 ; +∞ [.
- Si n est impair f_n est impaire et décroissante sur] -∞ ; 0 [et sur] 0 ; +∞ [.

Tableaux de variations :

n pair

- $\lim_{x \to 0^-} x^n = +\infty$ et $\lim_{x \to 0^+} x^n = +\infty$

L'axe des ordonnées est asymptote verticale

- $\lim_{x \to +\infty} x^n = 0$ et $\lim_{x \to -\infty} x^n = 0$

L'axe des abscisses est asymptote horizontale

x	-∞		0		+∞
$f_n'(x)$		+	‖	–	
f_n	0	↗	+∞ ‖ +∞	↘	0

n impair

- $\lim_{x \to 0^-} x^n = -\infty$ et $\lim_{x \to 0^+} x^n = +\infty$

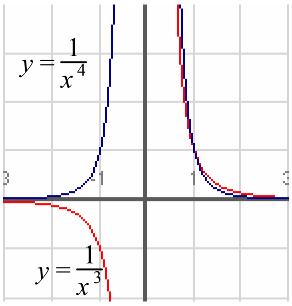
L'axe des ordonnées est asymptote verticale

- $\lim_{x \to +\infty} x^n = 0$ et $\lim_{x \to -\infty} x^n = 0$

L'axe des abscisses est asymptote horizontale

x	-∞		0		+∞
$f_n'(x)$		–	‖	–	
f_n	0	↘	-∞ ‖ +∞	↘	0

Représentations graphiques :



C) Fonction racine *n*-ième

Propriété

Soit n un entier naturel non nul.
La fonction $x \longmapsto x^n$ est une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$.
C'est-à-dire que pour tout $k \in \mathbb{R}_+$, l'équation $x^n = k$ a une solution unique dans $\mathbb{R}_+$.

Si $n \geq 2$, cette solution est notée $\sqrt[n]{k}$ et se lit racine n-ième de k.

Preuve :
La fonction $x \longmapsto x^n$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. De plus $0^n = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$. On en déduit le résultat.

Exemple : $\sqrt[4]{16} = 2$ $\qquad \sqrt[3]{125} = 5$

Définition

On appelle **fonction racine *n*-ième** la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $x \longmapsto \sqrt[n]{x}$.

Remarques :

- La fonction $x \longmapsto \sqrt[n]{x}$ est une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$.
- L'équivalence $\begin{cases} x \in \mathbb{R}_+ \\ y = x^n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \in \mathbb{R}_+ \\ \sqrt[n]{y} = x \end{cases}$ traduit le fait que la fonction $x \longmapsto x^n$ restreinte à $\mathbb{R}_+$ et la fonction racine n-ième sont réciproques l'une de l'autre.

Propriétés

Pour tout réel x positif, on a :

- $\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x$
- $\sqrt[n]{x^n} = x$

Propriété

Pour tout réel x strictement positif, et pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 , on a :
$$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$$

Attention :
$\sqrt[n]{0}$ est défini et vaut 0, mais $x^{\frac{1}{n}}$ n'est pas défini en 0.

Preuve :

Pour tout $x > 0$, $\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x$. On a alors, pour tout $x > 0$:
$$\ln\left(\left(\sqrt[n]{x}\right)^n\right) = \ln x \Leftrightarrow n \ln\left(\sqrt[n]{x}\right) = \ln x \Leftrightarrow \ln\left(\sqrt[n]{x}\right) = \frac{1}{n}\ln x$$

On en déduit que pour tout $x > 0$: $\sqrt[n]{x} = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln x} = \mathrm{e}^{\ln x \cdot \frac{1}{n}} = x^{\frac{1}{n}}$

Propriétés

Pour tout réel x strictement positif, et pour tout entier naturel p et q avec $q \geq 2$, on a :

- $x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p} = \left(\sqrt[q]{x}\right)^p$
- $x^{-\frac{1}{q}} = \dfrac{1}{\sqrt[q]{x}}$

Preuve :
$x^{\frac{p}{q}} = x^{p \times \frac{1}{q}} = \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p = \left(\sqrt[q]{x}\right)^p$ L'autre égalité se démontre de la même façon.

Exemple : $8^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^2 = 4$

Propriété

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 .
La fonction racine n-ième est dérivable sur] 0 ; +∞ [et pour tout $x > 0$, on a :

$$(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n} - 1}$$

Preuve :

Pour tout réel $x > 0$, on pose $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$. On a alors $f(x) = e^{\frac{1}{n} \ln x} = e^{u(x)}$ avec $u(x) = \frac{1}{n} \ln x$

u est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout réel $x > 0$, on a $u'(x) = \frac{1}{n} \times \frac{1}{x}$

On en déduit que $x \longmapsto \sqrt[n]{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout réel $x > 0$, on a :

$$(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n} \times \frac{1}{x} e^{\frac{1}{n} \ln x} = \frac{1}{n} \times \frac{1}{x} x^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n} - 1}$$

Etude de la dérivabilité en 0 :

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} e^{(\frac{1}{n} - 1) \ln x}$$

Or $\lim_{x \to 0} (\frac{1}{n} - 1) \ln x = +\infty$ et $\lim_{X \to +\infty} e^{X} = +\infty$

On en déduit que $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = +\infty$ et que f n'est pas dérivable en 0 . La courbe admet une tangente verticale à l'origine.

Propriétés

- La fonction racine n-ième est continue sur [0 ; +∞ [.
- La fonction racine n-ième est strictement croissante sur [0 ; +∞ [.

Preuve :

- La fonction racine n-ième est dérivable sur] 0 ; +∞ [, elle est donc continue sur] 0 ; +∞ [.

  De plus $\lim_{x \to 0} e^{\frac{1}{n} \ln x} = 0$ et $\sqrt[n]{0} = 0$.

  La fonction racine n-ième est donc continue en 0 . On en déduit qu'elle est continue sur [0 ; +∞ [

- De plus, pour tout $x > 0$, $\frac{1}{n} x^{\frac{1}{n} - 1} > 0$. On en déduit que la fonction racine n-ième est strictement croissante sur [0 ; +∞ [.

Tableau de variations :

f_n désignant la fonction racine n-ième

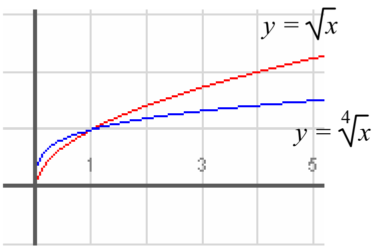
x	0 $\qquad$ +∞
$f_n'(x)$	+
f_n	0 ↗ +∞

Pour tout $x > 0$, on a $\sqrt[n]{x} = e^{\frac{1}{n} \ln x}$

Or $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{n} \ln x = +\infty$ et $\lim_{X \to +\infty} e^{X} = +\infty$

Ainsi $\lim_{x \to +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$

Représentations graphiques :



Remarque :

Toutes les courbes passent par O et par le point de coordonnées (1 ; 1).

Remarque :

Pour tout réel α et pour tout réel x strictement positif, on a $x^{\alpha} = e^{\alpha \ln x}$.
Donc, pour α donné, on peut définir sur] 0 ; +∞ [la fonction $f : x \longmapsto x^{\alpha}$.
L'étude de cette fonction puissance n'est pas au programme.
On peut tout de même noter que la fonction $f : x \longmapsto x^{\alpha}$ est dérivable sur] 0 ; +∞ [et que pour tout $x > 0$, on a $f'(x) = \alpha x^{\alpha - 1}$

3) CROISSANCES COMPAREES

Propriétés

- Soit α un réel . On a :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x}}{x^{\alpha}} = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to +\infty} x^{\alpha} e^{-x} = 0$$

- Soit α un réel strictement positif . On a :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^{\alpha}} = 0$$

- La croissance exponentielle est beaucoup plus forte que la croissance de n'importe quelle fonction puissance.

- La croissance de n'importe quelle fonction puissance est plus forte que la croissance logarithmique.

Preuve :

- Pour tout réel $x > 0$, on a : $\dfrac{e^{x}}{x^{\alpha}} = \dfrac{e^{x}}{e^{\alpha \ln x}} = e^{x - \alpha \ln x}$

  Or $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - \alpha \ln x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x\left(1 - \alpha \dfrac{\ln x}{x}\right) = +\infty$ (car $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$) et $\lim\limits_{X \to +\infty} e^{X} = +\infty$

  Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{x}}{x^{\alpha}} = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{x - \alpha \ln x} = +\infty$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\alpha} e^{-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^{\alpha}}{e^{x}} = 0$

- Pour tout réel $x > 0$, on a : $\dfrac{\ln x}{x^{\alpha}} = \dfrac{1}{\alpha} \dfrac{\ln x^{\alpha}}{x^{\alpha}}$

  Or $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\alpha} = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{\ln X}{X} = 0$

  Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x^{\alpha}}{x^{\alpha}} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^{\alpha}} = 0$