LES SUITES NUMERIQUES

I) GENERALITES

1) DEFINITION et NOTATIONS

On appelle **suite numérique** , toute application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

Une suite se note u , $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(u_n)_{n \geq 0}$ ou (u_n) , qui est la notation la plus utilisée .

On note u_n **l'image** de l'entier naturel n . *(plutôt que u (n) …)*

On dit que u_n est **le terme général** de la suite (u_n) , **le terme de rang n** ou **le terme d'indice n** .

u_0 est le **terme initial** de la suite (u_n) .

- (u_n) désigne une **suite**.
- u_n désigne un **nombre**

Comment présenter une suite ?

- On peut présenter une suite sous forme de liste : « on considère la suite $(1 , 2^2 , 3^2 , \dots , n^2 , \dots)$ »
- Le plus souvent, on la présente par son terme général : « soit (u_n) la suite définie par $u_n = n^2$ »

Ex :

- Soit (u_n) la suite définie par $u_n = 3n + 10$
  Le terme d'indice 2 est $u_2 = 16$, le terme d'indice 10 est $u_{10} = 40$, le terme d'indice 2n est $u_{2n} = 6n + 10$ …
- La suite des nombres impairs a pour terme général $u_n = 2n + 1$.

Complément :

Une suite peut n'être définie qu'à partir d'un certain rang n_0 ; on la note parfois $(u_n)_{n \geq n_0}$ et son **terme initial** est u_{n_0}

- La suite de terme général $u_n = \sqrt{n-4}$, n'est définie que pour $n \geq 4$, on la note $(u_n)_{n \geq 4}$
- La suite de terme général $u_n = \frac{1}{n}$, n'est définie que pour $n \geq 1$, on la note $(u_n)_{n \geq 1}$

Rem : Comme pour les fonctions, on omet souvent de préciser l'ensemble de définition … **attention !**

2) DIFFERENTES FACONS DE DEFINIR UNE SUITE …

a) PAR UNE FORMULE EXPLICITE

On peut définir une suite par une **formule explicite** , qui permet de calculer directement à partir de n le terme d'indice n .

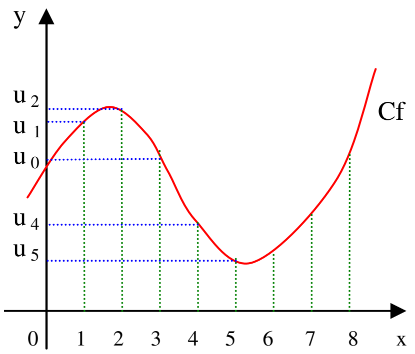
Ex :

- La suite (u_n) définie par $u_n = 5^n$
- La suite (v_n) définie par $v_n = 3n^2 + 5$

CAS PARTICULIER IMPORTANT :

Soit f une fonction définie sur $[0 ; +\infty [$. (au moins) .
On définit une suite (u_n) en posant, pour tout entier naturel n ,
$u_n = f(n)$.

On dispose alors, à partir de la courbe représentative de la fonction f , d'une représentation graphique de la suite (u_n) .
Sur l'axe des ordonnées, on peut lire les termes $u_0 , u_1 , u_2 , \dots$



Ex :

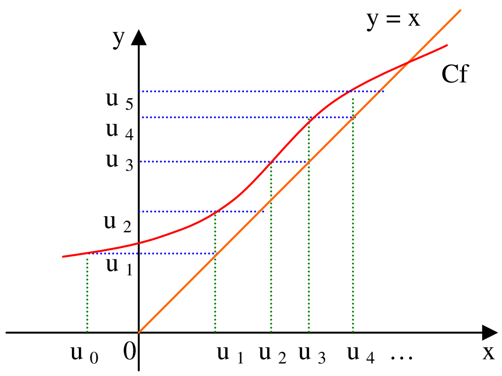
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \longmapsto 3x^2 + 2x + 5$ et (u_n) la suite définie par $u_n = f(n)$.
Ainsi pour tout entier naturel n , on a : $u_n = 3n^2 + 2n + 5$.
Pour calculer le terme d'indice n , il suffit de chercher l'image de n par f .
On en déduit que : $u_0 = 5$, $u_1 = 10$, $u_2 = 21$, … , $u_{n+1} = 3(n+1)^2 + 2(n+1) + 5 = 3n^2 + 8n + 10$

b) PAR RECURRENCE

On donne $u_0 = 0$ et on considère la relation $u_{n+1} = 2u_n + 3$.
Ceci nous permet de calculer de **proche en proche** tous les termes de la suite (u_n) .
En effet : $u_1 = 2u_0 + 3 = 2 \times 0 + 3 = 3$
$u_2 = 2u_1 + 3 = 2 \times 3 + 3 = 9$
$u_3 = 2u_2 + 3 = 2 \times 9 + 3 = 21$ …
Si l'on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + 3$, alors on peut dire que la suite (u_n) est définie par la donnée de $u_0 = 0$ et par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$. (cette relation est appelée **relation de récurrence**)

De manière plus générale :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I , telle que, pour tout réel $x \in I$, $f(x) \in I$. ($f(I) \subset I$)
On peut alors définir une suite (u_n) par la donnée de u_0 ($u_0 \in I$) , et de **la relation de récurrence** $\mathbf{u_{n+1} = f(u_n)}$ **.**



En utilisant la courbe représentative de la fonction f et la droite d'équation y = x , on dispose alors, d'une représentation graphique de la suite (u_n) .
On peut lire les termes u_0 , u_1 , u_2 , … sur l'axe des abscisses et sur l'axe des ordonnées .

Dans la plupart des cas, par manque de place ou de lisibilité, on ne peut représenter que les premiers termes de la suite .

Rem :
- La donnée de u_0 et d'une relation $u_{n+1} = f(u_n)$ ne permet pas toujours de définir une suite.
  La remarque « … f (x) est aussi dans I … » est importante .

Ex :
Soit f la fonction définie par $f : x \longmapsto \dfrac{2}{2 - x}$. Si $u_0 = 1$, alors $u_1 = f(u_0) = f(1) = 2$.
Or f n'est pas définie en 2, donc $u_2 = f(u_1)$ n'est pas défini …

Chaque terme étant défini à partir du précédent, pour connaître le terme d'indice n, il faut d'abord calculer les n – 1 termes qui le précèdent …

- Eviter la confusion entre les suites que l'on peut définir, avec la même fonction, par une formule explicite ou par récurrence.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x$, alors :

« EXPLICITE » : $u_0 = f(0) = 0$, $u_1 = f(1) = 3$, $u_2 = f(2) = 6$ …
« RECURRENCE avec $u_0 = 1$ » : $u_0 = 1$, $u_1 = f(u_0) = 3$, $u_2 = f(u_1) = 9$ …

3) SUITES CROISSANTES , SUITES DECROISSANTES

Les suites sont des fonctions particulières … il n'est donc pas étonnant de retrouver des définitions, déjà vues pour les fonctions, …

Théorème :
- Une suite (u_n) est **croissante** si, pour tout entier naturel n , $\mathbf{u_n \leq u_{n+1}}$.
  $u_0 \leq u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \dots$
- Une suite (u_n) est **décroissante** si, pour tout entier naturel n , $\mathbf{u_n \geq u_{n+1}}$.
  $u_0 \geq u_1 \geq u_2 \geq \dots \geq u_n \geq u_{n+1} \geq \dots$
- Une suite (u_n) est **monotone** si elle est croissante ou décroissante.

On définit de même ces notions ***strictement*** *.*

Rem :
- Si pour tout entier naturel n , $u_n = u_{n+1}$, on dit que la suite est **constante** .
- S'il existe un entier naturel p tel que, pour tout entier $n \geq p$, on ait $u_n \leq u_{n+1}$, on dit que la suite est croissante à partir du rang p . (de même pour les autres notions vues ci-dessus)
- Toutes les suites ne sont pas croissantes ou décroissantes … (ex : la suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$)

Comment fait-on dans la pratique ?

- On étudie le signe de la **différence** $\mathbf{u_{n+1} - u_n}$
- **ou** , si la suite est à termes strictement positifs (ou strictement négatifs), on compare **le quotient** $\mathbf{\dfrac{u_{n+1}}{u_n}}$ **à 1** .

Ex :

- Soit la suite (u_n) définie par $u_n = n^2 - n - 2$.

Pour tout entier naturel n , on a :
$u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - (n+1) - 2 - (n^2 - n - 2) = \dots = 2n$
Ainsi, $u_{n+1} - u_n \geq 0$, c'est à dire $u_{n+1} \geq u_n$; la suite (u_n) est donc croissante.

et pourtant $f : x \longmapsto x^2 - x - 2$ n'est pas croissante sur $\mathbb{R}_+$

- Soit la suite (v_n) définie par $v_n = \frac{n}{2^n}$ ($n \geq 1$)

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a :

$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \frac{n+1}{2n}$; de plus $n \geq 1$, donc $n + 1 \leq 2n$, et $\frac{v_{n+1}}{v_n} \leq 1$.

Or $v_n > 0$, donc $v_{n+1} \leq v_n$; la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ est donc décroissante.

4) SUITES BORNEES

Théorème :

- Une suite (u_n) est **majorée** s'il existe un réel M tel que pour tout entier naturel n , on ait $u_n \leq M$.
- Une suite (u_n) est **minorée** s'il existe un réel m tel que pour tout entier naturel n , on ait $u_n \geq m$.
- Une suite (u_n) est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

Comme pour les fonctions, on dit que M (resp. m) est **un majorant** (resp. **minorant**) de la suite.

Ex :

- Une suite croissante est minorée par son terme initial ; une suite décroissante est majorée par son terme initial.
- Soit la suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n + \frac{1}{n+1}$.

  Pour tout entier naturel n , on a $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ et $0 \leq \frac{1}{n+1} \leq 1$; donc $-1 \leq u_n \leq 2$

  La suite (u_n) est donc bornée .

Rem :
S'il existe un entier naturel p tel que, pour tout entier $n \geq p$, on ait $u_n \leq M$, on dit que la suite est majorée à partir du rang p .
(de même pour les autres notions vues ci-dessus)

5) LE COTE "AGREABLE" DES SUITES $u_n = f(n)$

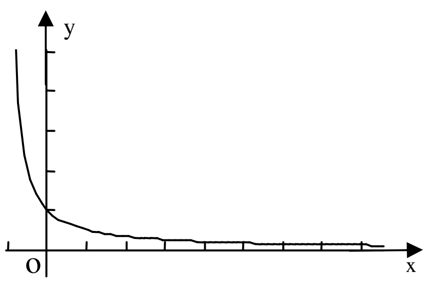
Si une suite est de la forme $u_n = f(n)$, on déduit rapidement, à partir des propriétés de la fonction f , des résultats sur la suite.
On montre facilement que :

- Si f est croissante sur $[0 ; +\infty[$, alors (u_n) est croissante.
- Si f est décroissante sur $[0 ; +\infty[$, alors (u_n) est décroissante.
- Si f est majorée sur $[0 ; +\infty[$, alors (u_n) est majorée.
- Si f est minorée sur $[0 ; +\infty[$, alors (u_n) est minorée.

Les réciproques sont fausses

Ex :
Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \frac{1}{n+1}$ et la fonction $f : x \longmapsto \frac{1}{x+1}$

… f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout réel $x \in \mathbb{R}_+$, on a $0 \leq f(x) \leq 1$.
On en déduit que (u_n) est aussi décroissante et bornée .



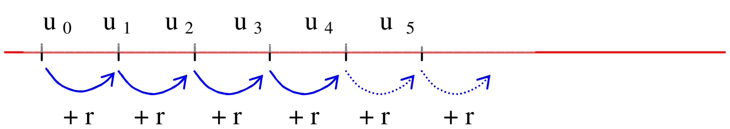
II) SUITES ARITHMETIQUES

1) DEFINITION PAR RECURRENCE

Définition :

On dit qu'une suite (u_n) est une **suite arithmétique** , s'il existe un réel r tel que pour tout entier naturel n , on ait $u_{n+1} = u_n + r$.
Le réel **r** est appelé **raison** de la suite (u_n) .

r peut-être positif ou négatif .



On passe d'un terme de la suite au terme suivant, en **ajoutant r .**

Ex :

- La suite des entiers naturels est une suite arithmétique de raison 1 .
- La suite des entiers naturels impairs est une suite arithmétique de raison 2 .
- Soit (u_n) la suite définie par $u_n = 4n + 4$.
  Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - u_n = 4(n+1) + 4 - (4n - 4) = 4$
  Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} = u_n + 4$ et (u_n) est une suite arithmétique de raison 4 .

L'astuce : calculer $u_{n+1} - u_n$

Plus généralement, on montre de la même façon, que toute suite (u_n) définie par $\mathbf{u_n = a\,n + b}$ (où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$) est **une suite arithmétique** de raison a et de premier terme b .

Et la réciproque ! ! !

2) DEFINITION PAR UNE FORMULE EXPLICITE

Définition :

Soit (u_n) **une suite arithmétique** de premier terme u_0 et de raison r .
Alors, pour tout entier naturel n , on a : $\mathbf{u_n = u_0 + n\,r}$

Preuve :

Additionnons membre à membre les n égalités ci-contre:
$$\begin{cases} u_1 = u_0 + r \\ u_2 = u_1 + r \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_{n-1} = u_{n-2} + r \\ u_n = u_{n-1} + r \end{cases}$$

On obtient :
$$(u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1}) + u_n = u_0 + (u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1}) + n\,r$$

Et après simplification :
$$u_n = u_0 + n\,r$$

Ex : Soit u_n la suite arithmétique définie par $u_0 = 7$ et $r = 12$, alors $u_6 = 7 + 6 \times 12 = 79$ …

Plus généralement …

Théorème :

Soit (u_n) une **suite arithmétique** de raison r .
Pour tous entiers naturels p et q , on a : $\mathbf{u_p = u_q + (p - q)\,r}$

Preuve : (Pour la preuve, on suppose que le premier terme de la suite est u_0)
On a $u_p = u_0 + p\,r$ et $u_q = u_0 + q\,r$, donc $u_p - u_q = p\,r - q\,r$ et $u_p = u_q + (p - q)\,r$.

Intérêts :

- Cette formule permet de calculer n'importe quel terme d'une suite arithmétique dès que l'on connaît la raison et un terme quelconque (il n'est pas nécessaire de connaître u_0)
- Cette formule permet aussi de calculer la raison d'une suite arithmétique dont on connaît deux termes.

Ex :

- Soit (u_n) une suite arithmétique telle que $u_2 = 4$ et $u_4 = 10$.
  On a $u_4 = u_2 + (4 - 2)\,r$, donc $r = \ldots = 3$.

- Soit (u_n) une suite arithmétique définie par $u_{10} = 30$ et $r = 2$.
  On a $u_{20} = u_{10} + (20 - 10)\,2 = 50$.

3) SENS DE VARIATION

Les résultats suivants ne sont pas surprenants :

Théorème :

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r .
- Si $\mathbf{r > 0}$, alors la suite (u_n) est strictement **croissante.**
- Si $\mathbf{r < 0}$, alors la suite (u_n) est strictement **décroissante.**
- Si $\mathbf{r = 0}$, alors la suite (u_n) est **constante.**

4) SOMME DE TERMES CONSECUTIFS

a) Remarque préliminaire : NOMBRE DE TERMES D'UNE SOMME

$u_1 + u_2$ est une somme de deux termes ; $u_1 + u_2 + u_3$ est une somme de trois termes
De manière générale , $u_1 + u_2 + \dots + u_p$ est une somme de p termes .

Comment faire (*sans compter sur les doigts* !...) pour calculer le nombre de termes de la somme $u_{12} + u_{13} + \dots + u_{56}$?

On peut écrire $u_{12} + u_{13} + \dots + u_{56} = u_{1+11} + u_{2+11} + \dots + u_{45+11}$
La somme a donc 45 termes, c'est à dire 56 – 12 + 1

Plus généralement, on a :

Le **nombre de termes** de la somme $u_p + u_{p+1} + \dots + u_q$ (p , q entiers naturels tels que $p \leq q$) est $\mathbf{q - p + 1}$

b) Etude d'un exemple fondamental : SOMME DES N PREMIERS ENTIERS NATURELS

On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n , par $u_n = n$.
Calculons la somme $S = u_1 + u_2 + \dots + u_n = 1 + 2 + \dots + n$.

On peut écrire :

$$S = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-2) + (n-1) + n$$
$$S = n + (n-1) + (n-2) + \dots + 3 + 2 + 1$$

En additionnant membre à membre, on obtient :

$2S = \underbrace{(n+1) + (n+1) + \dots + (n+1)}_{\text{n fois}}$ c'est à dire $2S = n(n+1)$ et donc $S = \dfrac{n(n+1)}{2}$

c) Cas général : En utilisant la même idée,

$$S = a + (a+r) + (a+2r) + \dots + b$$
$$S = b + (b-r) + (b-2r) + \dots + a$$

a et b sont les termes extrêmes de S,
r est la raison de la suite

On montre de façon plus générale que :

Théorème :

La **somme** de termes consécutifs d'une **suite arithmétique** est égale au produit du nombre de termes par la demi-somme des termes extrêmes .

Soit encore, $S = \sum_{i=0}^{n} u_i = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = \dfrac{(u_0 + u_n)(n+1)}{2}$

$S = \text{"nombre de termes"} \times \dfrac{\text{"premier terme"} + \text{"dernier terme"}}{2}$

Preuve : *cf* COURS …

Ex :

- Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r .
  La somme $S = u_7 + u_8 + \dots + u_{15} = 9 \times \dfrac{u_7 + u_{15}}{2}$

- Soit (v_n) la suite arithmétique de raison 4 et de premier terme $v_0 = 15$.
  On a $v_8 = v_0 + 4 \times 8 = 15 + 32 = 47$
  On en déduit que $v_0 + v_1 + \dots + v_8 = 9 \times \dfrac{v_0 + v_8}{2} = 9 \times \dfrac{15 + 47}{2} = 279$

Rem : **Moyenne arithmétique**

- Si a , b et c sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique, alors $b = \dfrac{a+c}{2}$

- De manière plus générale, si $u_p , u_{p+1} , \dots , u_{p+n}$ sont n + 1 termes consécutifs d'une suite arithmétique, alors la moyenne arithmétique de ces termes est la moyenne arithmétique des termes extrêmes : $\dfrac{u_p + u_{p+n}}{2}$

III) SUITES GEOMETRIQUES

1) DEFINITION PAR RECURRENCE

Définition :

On dit qu'une suite (u_n) est une **suite géométrique** , s'il existe un réel q tel que pour tout entier naturel n on ait $\mathbf{u_{n+1} = q\, u_n}$.
Le réel **q** est appelé **raison** de la suite (u_n) .

***q* peut-être positif ou négatif** *et non nul (sans intérêt)*

$$u_0 \xrightarrow{\times q} u_1 \xrightarrow{\times q} u_2 \xrightarrow{\times q} u_3 \xrightarrow{\times q} u_4 \xrightarrow{\times q} u_5 \cdots$$

On passe d'un terme de la suite au terme suivant, en **multipliant par q** .

Ex :

- Soit (u_n) , la suite des puissances de 2 , définie par $u_n = 2^n$
  Pour tout entier naturel n , on a $u_{n+1} = 2^{n+1} = 2 \times 2^n = 2 \times u_n$
  Cette suite est donc une suite géométrique de raison 2 .

- Soit (v_n) la suite définie par $v_n = n\, 5^n$.
  Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = 5 \times \dfrac{n+1}{n}$, ce qui n'est pas un rapport constant.
  La suite (v_n) n'est donc pas une suite géométrique.

L'astuce : calculer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$

- Soit (w_n) la suite définie pour tout entier naturel n , par $w_n = 4 \times 3^n$
  Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $w_{n+1} = 4 \times 3^{n+1} = 3 \times (4 \times 3^n) = 3 \times w_n$
  Cette suite est donc une suite géométrique de raison 3.

Plus généralement, on montre de la même façon, que toute suite (u_n) définie par $\mathbf{u_n = a\, q^n}$ (où $a \in \mathbb{R}^*$ et $q \in \mathbb{R}^*$) est une **suite géométrique** de raison q et de premier terme a.

Et la réciproque ! ! !

2) DEFINITION PAR UNE FORMULE EXPLICITE

Théorème :

Soit (u_n) une **suite géométrique** de premier terme u_0 et de raison q .
Alors, pour tout entier naturel n , on a : $\mathbf{u_n = u_0 \times q^n}$

Preuve :

(u_n) est une suite géométrique, donc $u_1 = u_0\, q$. Puis $u_2 = u_1\, q = (u_0\, q)\, q = u_0\, q^2$
Et ainsi de proche en proche, car lorsqu'on aura établi que pour l'entier naturel p , $u_p = u_0\, q^p$, on en déduira que $u_{p+1} = u_0\, q^{p+1}$.
En effet $u_{p+1} = u_p\, q = u_0\, q^p\, q = u_0\, q^{p+1}$.

Ex : Soit u_n la suite géométrique définie par $u_0 = 7$ et r = 12 , alors $u_3 = 7 \times 12^3 = 12096$

Plus généralement …

Théorème :

Soit (u_n) une **suite géométrique** de raison q . Pour tout entier naturel m et n , on a $\mathbf{u_m = u_n \times q^{m-n}}$

Preuve : (Pour la preuve, on suppose que le premier terme de la suite est u_0)
On a $u_m = u_0 \times q^m$ et $u_n = u_0 \times q^n$
$q \neq 0$, donc $\dfrac{u_m}{u_n} = \dfrac{q^m}{q^n} = q^{m-n}$ et $u_m = u_n \times q^{m-n}$

Intérêt : Cette formule permet de calculer n'importe quel terme d'une suite géométrique dès que l'on connaît la raison et un terme quelconque (il n'est pas nécessaire de connaître u_0)

Ex :

- Soit (u_n) une suite géométrique définie par $u_{10} = 30$ et q = 2 .
  On a $u_{13} = u_{10} \times 2^{13-10} = 30 \times 2^3 = 30 \times 8 = 240$
- Soit (v_n) une suite géométrique telle que $v_2 = 5$ et $v_8 = 320$.
  On a $v_8 = v_2 \times q^{8-2}$, donc $320 = 5 \times q^6$ c'est à dire $q^6 = 64$
  Il y a donc deux valeurs possibles q = 2 **ou** q = – 2

Attention : Cette formule ne permet pas de calculer la raison d'une suite géométrique dont on connaît **deux termes !**...

Rem : **Moyenne géométrique**

Si a , b et c sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique alors $b^2 = ac$.
Si trois nombres positifs a , b et c vérifient $b^2 = ac$, on dit que b est la moyenne géométrique de a et c .

3) SENS DE VARIATIION

Théorème :

Soit (u_n) une **suite géométrique** de raison q (strictement positive) et de terme initial u_0 .

- Si $\mathbf{0 < q < 1}$ et $\mathbf{u_0 < 0}$, alors la suite (u_n) est strictement **croissante.**
  Si $\mathbf{0 < q < 1}$ et $\mathbf{u_0 > 0}$, alors la suite (u_n) est strictement **décroissante.**
- Si $\mathbf{q > 1}$ et $\mathbf{u_0 < 0}$, alors la suite (u_n) est strictement **décroissante.**
  Si $\mathbf{q > 1}$ et $\mathbf{u_0 > 0}$, alors la suite (u_n) est strictement **croissante.**
- Si $\mathbf{q = 1}$, alors la suite (u_n) est **constante.**

Si $q < 0$ la suite est alternativement positive puis négative …

Idée de preuve : Soit $n \in \mathbb{N}$.
On a $u_n = u_0 \times q^n$ et $u_{n+1} = u_0 \times q^{n+1}$
Ainsi $u_{n+1} - u_n = u_0 \times q^{n+1} - u_0 \times q^n = u_0 \times (q^{n+1} - q^n) = q^n \times u_0 \times (q - 1)$
$q > 0$; on en déduit que le signe de $u_{n+1} - u_n$ est le signe de $u_0 \times (q - 1)$ …

4) SOMME DE TERMES CONSECUTIFS

a) Etude d'un exemple fondamental : SUITE GEOMETRIQUE DE PREMIER TERME $u_0 = 1$.

On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n , par $u_n = q^n$ ($q \neq 0$ et $q \neq 1$)

Calculons la somme $S = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n$.

On peut écrire :
$$S = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} + q^n$$
$$qS = q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n + q^{n+1}$$

Par soustraction membre à membre, on obtient :

$S - qS = 1 - q^{n+1}$ c'est à dire $(1 - q)\,S = 1 - q^{n+1}$ et donc $\mathbf{S = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}}$

b) Cas général : Soit (u_n) une suite géométrique de raison q ($q \neq 0$, $q \neq 1$) .
Calculons la somme $S = u_4 + u_5 + \ldots + u_8$

On a $S = u_4 + q\,u_4 + q^2 u_4 + q^3 u_4 + q^4 u_4 = u_4(1 + q + q^2 + q^3 + q^4)$

Ainsi $S = \mathbf{u_4} \times \dfrac{\mathbf{1 - q^5}}{\mathbf{1 - q}}$

Théorème :

La **somme** de termes consécutifs d'une **suite géométrique** est égale à

$$S = \sum_{i=0}^{n} u_i = u_0 + u_1 + u_3 + \ldots + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad \text{si } q \neq 1$$

$$S = \sum_{i=0}^{n} u_i = u_0 + u_1 + u_3 + \ldots + u_n = (n+1) \times u_0 \quad \text{si } q = 1$$

$$\mathbf{S = \text{"premier terme"} \times \frac{1 - q^{\text{"nombre de termes"}}}{1 - q}}$$

Preuve : *cf* COURS …

Ex : Soit (v_n) la suite géométrique définie , pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = 2^n$

On a $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n = 1 \times \dfrac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} = 2^{n+1} - 1$

IV) LIMITE D'UNE SUITE

Étudier la limite d'une suite (u_n) , c'est examiner le comportement des termes u_n lorsque n prend des valeurs de plus en plus grandes vers $+\infty$

1) LES DIFFERENTS CAS POSSIBLES

Soit une suite (u_n) quelconque.

cas 1

Si « ***u_n est aussi grand que l'on veut dès que n est assez grand*** » , alors on dit que la suite (u_n) a pour limite $+\infty$.

On note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

De manière plus mathématique :

Pour tout réel $M > 0$, il existe un entier naturel p , tel que, si $n \geq p$, alors $u_n > M$

Ex : $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$

cas 2

Si les termes u_n finissent par être négatifs et « ***si u_n est aussi grand que l'on veut en valeur absolue dès que n est assez grand*** », alors on dit que la suite (u_n) a pour limite $-\infty$.

On note : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

Ex :

$\lim\limits_{n \to +\infty} (-n^2) = -\infty$

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} (-u_n) = +\infty$

cas 3 (suite convergente)

Soit L un réel donné.

Intuitivement, dire que (u_n) a pour limite L , signifie que lorsque n est de plus en plus grand, les nombres u_n correspondants viennent s'accumuler autour de L
C'est à dire, tout intervalle ouvert de centre L contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

On note : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = L$

De manière plus mathématique :

Pour tout ε ($\varepsilon > 0$) , il existe un entier naturel p , tel que, si $n \geq p$, alors $u_n \in \left] L - \varepsilon ; L + \varepsilon \right[$
(c'est à dire $L - \varepsilon < u_n < L + \varepsilon$)

Ex : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$

Rem : Si une suite (u_n) a une limite finie L , alors la limite L est unique.

cas 4

Aucun des trois cas ne se produit … **(u_n) n'a pas de limite**

Ex : La suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$ prend successivement les valeurs 1 et – 1
Ainsi (u_n) n'a pas pour limite $+\infty$, n'a pas pour limite $-\infty$ et n'a pas pour limite un réel.

Rem : Une suite qui ne converge pas est **divergente** . (cas 1 , cas 2 , cas 4)

2) LE CAS $u_n = f(n)$

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a ; +\infty [$ et (u_n) la suite définie par $u_n = f(n)$.

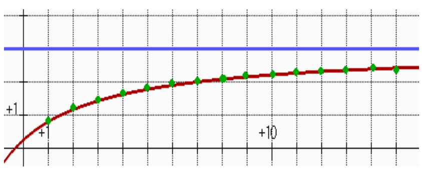
Si **f** a une **limite finie ou infinie en $+\infty$** , alors **la suite (u_n) a la même limite.**

Preuve intuitive : (cas où la limite est $+\infty$)
f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$. Ainsi lorsque x décrit l'intervalle $[a ; +\infty [$ les nombres f (x) sont aussi grands que l'on veut dès que x est assez grand . Il en est donc de même pour les nombres $u_n = f(n)$ puisque x prend toutes les valeurs entières de $[a ; +\infty [$ …

Ex : Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \dfrac{3n+1}{n+4}$ et la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{3x+1}{x+4}$

Pour tout entier naturel n , on a $u_n = f(n)$; de plus … $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$

On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 3$



Attention : **La réciproque est fausse !**

Ex : Pour tout entier naturel n , on a $\sin(2\pi n) = 0$.
Ainsi la suite (u_n) définie par $u_n = \sin(2\pi n)$ est une suite constante, donc convergente.
Mais , la fonction $f : x \longmapsto \sin(2\pi x)$ n'admet pas de limite en $+\infty$.

Conséquences pour quelques suites de référence :

Théorème : (admis)

- Les suites de termes généraux $\sqrt{n}$, n , n^2 et n^3 ont pour limite **$+\infty$** .
- Les suites de termes généraux $\frac{1}{\sqrt{n}}$, $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n^2}$ et $\frac{1}{n^3}$ convergent vers **0** .

3) OPERATIONS ALGEBRIQUES

Les **théorèmes** énoncés sur la limite d'une somme, d'un produit, d'un quotient de deux **fonctions** sont encore vrais pour les **suites**.

Ex : « Le cas de l'inverse »

- Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{u_n} = 0$
- Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ et $u_n > 0$ (à partir d'un certain rang) , alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{u_n} = +\infty$.

4) THEOREME DES GENDARMES

Théorème :

Soit (u_n) , (v_n) et (w_n) trois suites vérifiant à partir d'un certain rang **$u_n \leq w_n \leq v_n$.**

Si **(u_n)** et **(v_n)** sont deux **suites convergentes de même limite ℓ** , alors la suite (w_n) est convergente et $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = \ell$

Preuve :
Soit $\varepsilon > 0$.
Il existe un entier naturel p_1 , tel que, si $n \geq p_1$, $\ell - \varepsilon < u_n < \ell + \varepsilon$
De même, il existe un entier naturel p_2 , tel que, si $n \geq p_2$, $\ell - \varepsilon < v_n < \ell + \varepsilon$
Soit N le plus grand des entiers p_1 et p_2 .
Ainsi pour tout $n > N$, on a $\ell - \varepsilon < u_n \leq w_n \leq v_n < \ell + \varepsilon$ et donc $\ell - \varepsilon < w_n < \ell + \varepsilon$

5) LIMITES DES SUITES ARITHMETIQUES ET GEOMETRIQUES

A) SUITES ARITHMETIQUES

Théorème : (évident)

Toute suite arithmétique de raison r non nulle est divergente.
- Si $r > 0$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$
- Si $r < 0$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

B) SUITES GEOMETRIQUES (q^n)

Théorème : (admis)

Soit q un réel .
- Si $-1 < q < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$
- Si $q = 1$, alors pour tout n , $q^n = 1$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 1$
- Si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$
- Si $q \leq -1$, alors la suite (q^n) est divergente

Ex :
La suite (u_n) définie par $u_n = 2^n$ est une suite géométrique de raison 2 supérieur à 1 ; elle est donc divergente et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

Rem :
On en déduit facilement le cas général $u_0 q^n$ …

Ex :
Soit (u_n) La suite définie par $u_n = -5 \times 2^n$.
On a vu que $\lim\limits_{n \to +\infty} 2^n = +\infty$; on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$