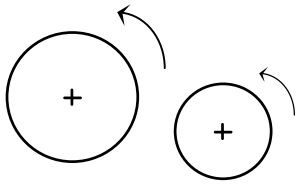
ANGLES ORIENTES DE VECTEURS

1) ORIENTATION DU PLAN

Orienter un cercle, c'est choisir un sens de parcours sur ce cercle appelé **sens direct** (ou positif) .
L'autre sens est appelé **sens indirect** (négatif ou rétrograde)

Orienter le plan*,* c'est orienter tous les cercles du plan dans le même sens.
L'usage est de choisir pour sens direct le sens contraire des aiguilles d'une montre.
(appelé aussi **sens trigonométrique**)

Un cercle trigonométrique est un cercle orienté dans le sens direct et de rayon 1.



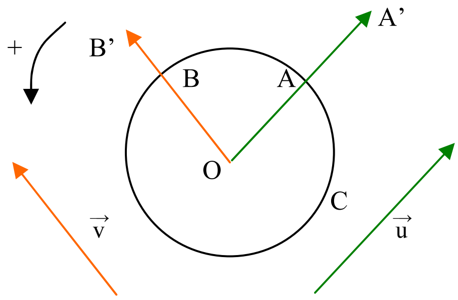
Dans la suite du chapitre, on suppose que le plan est orienté dans le sens trigonométrique.

2) MESURES DE L'ANGLE ORIENTE D'UN COUPLE DE VECTEURS NON NULS

Sauf avis contraire, les angles sont mesurés en radian.

A) ENSEMBLE DES MESURES

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan orienté, O un point quelconque et C le cercle trigonométrique de centre O.
On considère A' et B' les points définis par $\overrightarrow{OA'} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OB'} = \vec{v}$.
Les demi-droites [OA') et [OB') coupent le cercle trigonométrique C respectivement en A et en B .
Les vecteurs $\overrightarrow{OA} = \frac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u}$ et $\overrightarrow{OB} = \frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}$ sont unitaires, respectivement colinéaires à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et de même sens qu'eux .
Vous avez vu dans l'activité comment on définit les mesures en radian del'angle orienté de vecteurs **unitaires** $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ à partir de celles de **l'arc orienté** $\overset{\frown}{AB}$ ...



Les mesures en radians de l'angle orienté de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$ sont celles de l'angle orienté de vecteurs unitaires $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ c'est à dire , celles de l'angle orienté de vecteurs unitaires $\left(\frac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u}, \frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}\right)$.

Il en résulte que si x est une mesure de $(\vec{u}, \vec{v})$, alors les autres mesures sont de la forme $x + 2k\pi \;, k \in \mathbb{Z}$.

On définit de même l'angle orienté d'un couple de demi-droites [Ox) et [Oy) que l'on note (Ox , Oy) .

On dit que les angles orientés de vecteurs sont définis **modulo 2 π .**

Notation :

- La notation usuelle est $\widehat{(\vec{u} \,;\, \vec{v})}$, mais s'il n'y a aucun risque de confusion , on notera seulement $(\vec{u}, \vec{v})$ cet angle orienté.
- Par abus de langage, on confond un angle et ses mesures.

  On écrit, par exemple, $\boldsymbol{(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{2}}$ signifiant qu'**une** mesure de $(\vec{u}, \vec{v})$ est $\frac{\pi}{2}$; les autres mesures sont alors de la forme $\frac{\pi}{2} + 2k\pi \;, k \in \mathbb{Z}$

On écrit aussi $\boldsymbol{(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \;, k \in \mathbb{Z}}$ **ou encore** $\boldsymbol{(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{2}\ [\bmod 2\pi]}$

B) MESURE PRINCIPALE

Une seule des mesures de l'angle orienté de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$ appartient à l'intervalle] -π ; π] ; On l'appelle **mesure principale** de l'angle orienté de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$.

Rem :

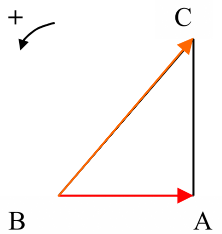
La valeur absolue de la mesure principale de l'angle orienté de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$ est la mesure de l'angle géométrique formé par ces deux vecteurs.

Ex :

La mesure principale de $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$ est $\frac{\pi}{3}$.

La mesure principale de $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$ est $-\frac{\pi}{6}$ et $\widehat{ACB} = \frac{\pi}{6}$

La mesure principale de $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est $-\frac{\pi}{2}$ et $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{2}$



$\widehat{ABC} = \frac{\pi}{3}$

C) ANGLE NUL, ANGLE PLAT, ANGLES DROITS

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan orienté.

- Dire que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires revient à dire que :

Angle nul : la mesure principale de ($\vec{u}$, $\vec{v}$) est égale à 0 *($\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de même sens)*

ou

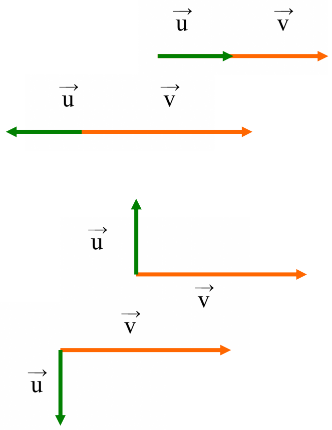
Angle plat : la mesure principale de ($\vec{u}$, $\vec{v}$) est égale à π *($\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de sens contraire)*

- Dire que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux revient à dire que :

Angle droit direct : la mesure principale de ($\vec{u}$, $\vec{v}$) est égale à $\frac{\pi}{2}$

ou

Angle droit indirect : la mesure principale de ($\vec{u}$, $\vec{v}$) est égale à $-\frac{\pi}{2}$



Rem : Pour tout vecteur non nul $\vec{u}$, $(\vec{u}, \vec{u}) = 0$ et $(\vec{u}, -\vec{u}) = \pi$

3) PROPRIETES DES MESURES DES ANGLES ORIENTES DE VECTEURS

A) RELATION DE CHASLES

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non nuls du plan orienté . On a :

$$(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{w})$$

En additionnant n'importe quelle mesure de ($\vec{u}$, $\vec{v}$) à n'importe quelle mesure de ($\vec{v}$, $\vec{w}$) , on obtient une mesure de ($\vec{u}$, $\vec{w}$) .

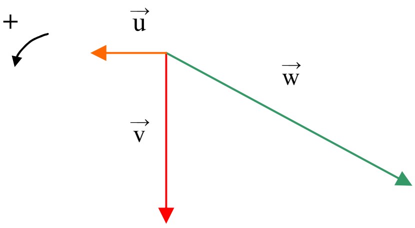
Réciproquement, n'importe quelle mesure de ($\vec{u}$, $\vec{w}$) est la somme d'une mesure de ($\vec{u}$, $\vec{v}$) et d'une mesure de ($\vec{v}$, $\vec{w}$) .

Ex : Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non nuls du plan orienté tels que $(\vec{u}, \vec{w}) = \frac{5\pi}{6}$ et $(\vec{w}, \vec{v}) = -\frac{\pi}{3}$

D'après la relation de Chasles $(\vec{u}, \vec{w}) + (\vec{w}, \vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v})$

On en déduit donc que $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{3} = \ldots = \frac{\pi}{2}$

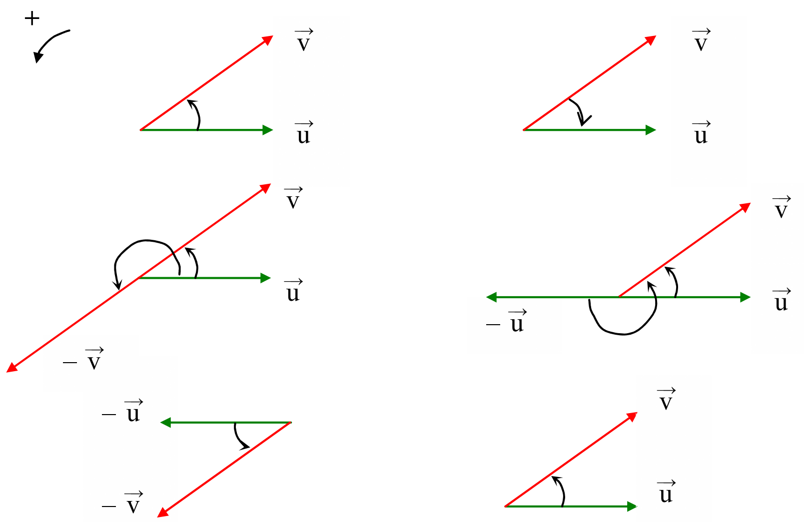
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc orthogonaux.



B) CONSEQUENCES DE LA RELATION DE CHASLES

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan orienté.

$(\vec{v}, \vec{u}) = -(\vec{u}, \vec{v})$
$(\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + \pi$ $(-\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + \pi$
$(-\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v})$



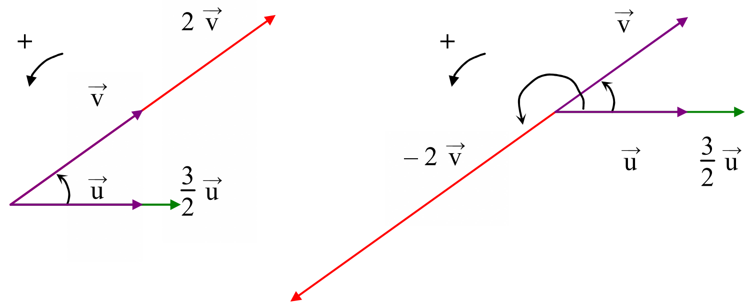
Soit k et k' deux réels non nuls :

- si k et k' sont de même signe, alors :

$$(k\,\vec{u}\,,\,k'\,\vec{v}) = (\vec{u}\,,\,\vec{v})$$

- si k et k' sont de signes contraires, alors :

$$(k\,\vec{u}\,,\,k'\,\vec{v}) = (\vec{u}\,,\,\vec{v}) + \pi$$



Preuve :

1) D'après la relation de Chasles $(\vec{u}\,,\,\vec{v}) + (\vec{v}\,,\,\vec{u}) = (\vec{u}\,,\,\vec{u})$
Or $(\vec{u}\,,\,\vec{u}) = 0$; donc $(\vec{v}\,,\,\vec{u}) = -(\vec{u}\,,\,\vec{v})$

2) D'après la relation de Chasles $(\vec{u}\,,\,\vec{v}) + (\vec{v}\,,-\vec{v}) = (\vec{u}\,,-\vec{v})$
Or $(\vec{v}\,,-\vec{v}) = \pi$; donc $(\vec{u}\,,-\vec{v}) = (\vec{u}\,,\,\vec{v}) + \pi$ …

3) D'après la relation de Chasles
$$(\vec{u}\,,\,\vec{v}) = (\vec{u}\,,-\vec{u}) + (-\vec{u}\,,-\vec{v}) + (-\vec{v}\,,\,\vec{v})$$
$$= \pi + (-\vec{u}\,,-\vec{v}) + \pi$$
$$= 2\pi + (-\vec{u}\,,-\vec{v})$$
Les mesures sont définies modulo 2π , donc $(-\vec{u}\,,-\vec{v}) = (\vec{u}\,,\,\vec{v})$

4)
- Si k et k' sont de même signe , le résultat découle de la définition …
- Si k et k' sont de signes contraires :
  D'après la relation de Chasles , on peut écrire : $(k\,\vec{u}\,,k'\,\vec{v}) = (k\,\vec{u}\,,k\,\vec{v}) + (k\,\vec{v}\,,k'\,\vec{v})$
  $(k\,\vec{u}\,,k\,\vec{v}) = (\vec{u}\,,\,\vec{v})$ d'après le résultat précédent .
  $k\,\vec{v}$ et $k'\,\vec{v}$ sont colinéaires et de sens contraire, donc $(k\,\vec{v}\,,k'\,\vec{v}) = \pi$
  On en déduit le résultat.

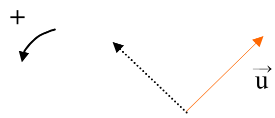
4) REPERE ORTHONORMAL

Un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j})$ est :

- **direct** , si l'une des mesures de $(\vec{i}\,,\,\vec{j})$ est $+\frac{\pi}{2}$
- **indirect** , si l'une des mesures de $(\vec{i}\,,\,\vec{j})$ est $-\frac{\pi}{2}$

Ex : Repère orthonormal direct | Repère orthonormal indirect

Rem :
- On définit de la même façon une base orthonormale directe …
- Etant donné un vecteur unitaire $\vec{u}$, il existe un unique vecteur unitaire $\vec{v}$ tel que $(\vec{u}\,,\,\vec{v})$ soit une base orthonormale directe.



5) COSINUS ET SINUS D'UN ANGLE ORIENTE DE VECTEURS

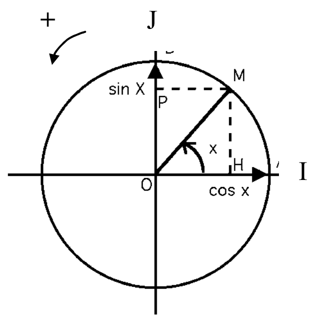
Sauf contre indication, l'unité utilisée est le radian.

Le plan orienté est muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{i}\,,\,\vec{j})$; on considère le cercle trigonométrique C de centre O .

A) RAPPEL : Cosinus et sinus d'un réel x

Pour tout réel x , il existe un point M unique du cercle trigonométrique C tel que x soit une mesure de $(\vec{OI}\,,\,\vec{OM})$.

- l'abscisse du point M est le **cosinus** de x (noté cos x)
- l'ordonnée du point M est le **sinus** de x (noté sin x)



B) COSINUS ET SINUS D'UN ANGLE ORIENTE DE VECTEURS

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan orienté.

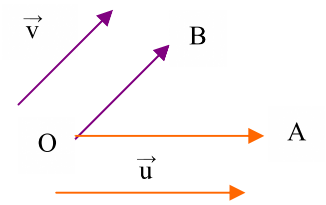
Si x est une mesure en radian de l'angle orienté $(\vec{u}\,,\,\vec{v})$, alors les autres mesures sont de la forme $x + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)
Or $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$ et $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$. On en déduit la définition suivante :

Le cosinus (resp. le sinus) de l'angle orienté de vecteurs ($\vec{u}$, $\vec{v}$) est le cosinus (resp. le sinus) de l'une quelconque de ses mesures. On note **cos ($\vec{u}$, $\vec{v}$)** et **sin ($\vec{u}$, $\vec{v}$)** .

C) LIEN ENTRE cos ($\vec{u}$, $\vec{v}$) et cos ($\widehat{AOB}$) lorsque $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$

Notons α la mesure en radians de l'angle géométrique $\widehat{AOB}$ formé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$, et notons x la mesure principale de ($\vec{u}$, $\vec{v}$) .
On a $\alpha = |x|$. Deux cas se présentent :

- Si $x \geq 0$, $|x| = x$ et par suite $\cos \alpha = \cos x$.
- Si $x \leq 0$, $|x| = -x$, et $\cos \alpha = \cos(-x) = \cos x$



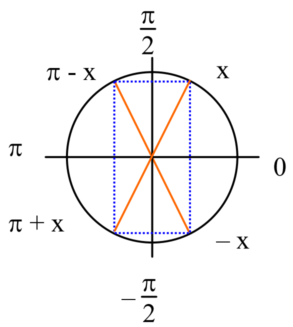
On a donc $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \cos(\widehat{AOB})$

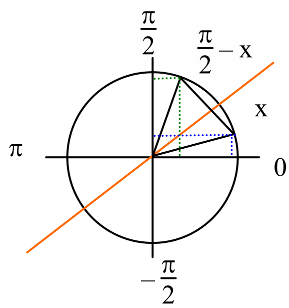
Rem :

Ce n'est pas vrai pour le sinus : $\sin(\widehat{AOB}) = |\sin(\vec{u}, \vec{v})|$

6) LIGNES TRIGONOMETRIQUES DES ANGLES ASSOCIES

Remarque préliminaire :
Dans la pratique, on se permet souvent quelques légèretés d'écriture … très utiles pour la clarté des figures et pour retenir les formules.





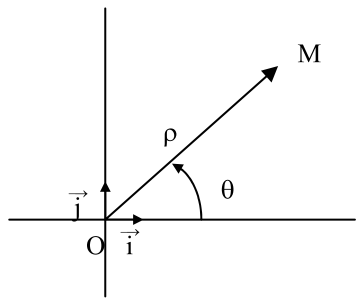
Les formules ci-dessous sont vraies pour tout réel x , mais pour faciliter la mémorisation, on se place dans le premier cadran.

▪ $\cos(-x) = \cos x$ ▪ $\cos(\pi - x) = -\cos x$ ▪ $\cos(\pi + x) = -\cos x$ ▪ $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$ ▪ $\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin x$	▪ $\sin(-x) = -\sin x$ ▪ $\sin(\pi - x) = \sin x$ ▪ $\sin(\pi + x) = -\sin x$ ▪ $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$ ▪ $\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos x$

7) REPERAGE ET COORDONNEES POLAIRES

A) COORDONNEES POLAIRES D'UN POINT

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct (O; $\vec{i}$, $\vec{j}$) . Soit M un point du plan (distinct de O) . On appelle **coordonnées polaires** de M , tout couple de nombres réels (ρ , θ) tel que : $\rho = OM$ et $(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) = \theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

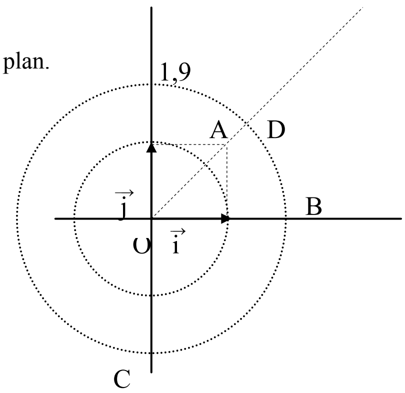


Rem :

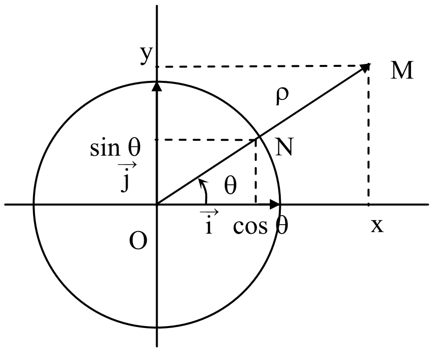
- O est appelé le pôle et [Ox) l'axe polaire.
- On dit que ρ est le rayon polaire du point M et θ l'un de ses angles polaires.
- Un repère polaire étant choisi, à tout couple de coordonnées polaires correspond un unique point du plan.

Ex :

- Un couple de coordonnées polaires de A est :
- Un couple de coordonnées polaires de B est :
- Un couple de coordonnées polaires de C est :
- Un couple de coordonnées polaires de D est :



B) REPERE POLAIRE ET REPERE CARTESIEN



Le plan est muni d'un repère orthonormal direct (O; $\vec{i}$, $\vec{j}$) .
Un point M (distinct de O) a pour coordonnées cartésiennes (x ; y) et pour coordonnées polaires (ρ , θ) . On a :

$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x = \rho \cos\theta$ et $y = \rho \sin\theta$

Preuve :

Soit C le cercle trigonométrique de centre O .
La demi-droite [OM) coupe C en N .
N a pour coordonnées (cos θ ; sin θ).
Or $\overrightarrow{OM} = \rho\ \overrightarrow{ON}$; on en déduit que $\overrightarrow{OM}$ a pour coordonnées (ρcos θ ; ρ sin θ).
D'autre part : $OM^2 = x^2 + y^2 = \rho^2$