Table des matières

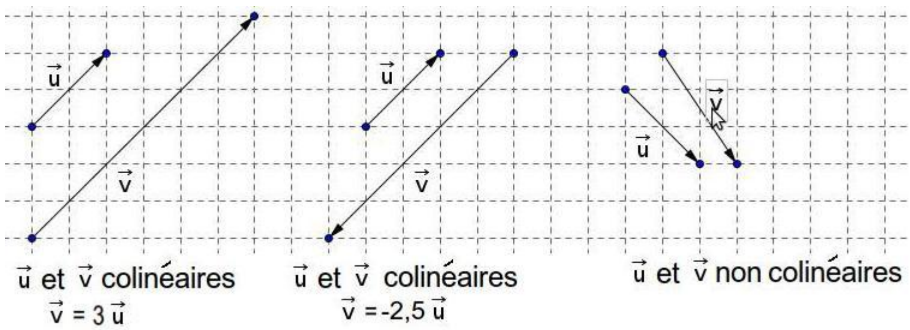
1 Vecteurs colinéaires

1.1 Définition

Définition : Vecteurs colinéaires
Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un réel k tel que $\overrightarrow{v} = k\overrightarrow{u}$ ou bien $\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{v}$

Remarques

- Si l'un des deux vecteurs est nul alors $k = 0$
  Le vecteur nul $\overrightarrow{0}$ est donc colinéaire à tout vecteur du plan.
- Rappel : Géométriquement, si deux vecteurs $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$ sont colinéaires, cela signifie qu'ils ont la même direction (mais pas nécessairement le même sens (voir figure ci-dessous)



1.2 Critère de colinéarité de deux vecteurs dans un repère

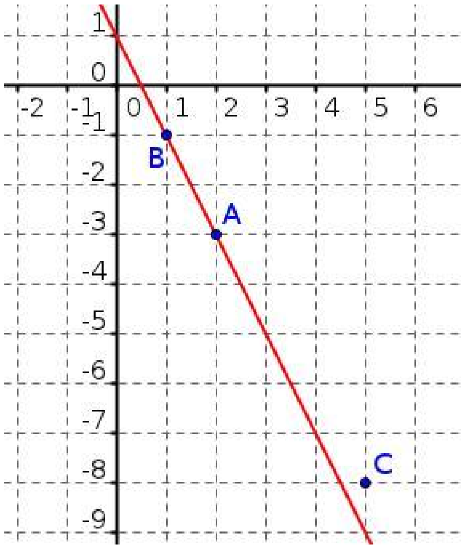
Propriété :Colinéarité de deux vecteurs dans un repère(vue en seconde)
Dans un repère du plan, deux vecteurs $\overrightarrow{u}(x; y)$ et $\overrightarrow{v}(x'; y')$ sont colinéaires si et seulement si $xy' - x'y = 0$

Exemple 1 : alignement de trois points
Dans un repère orthonormé du plan, on donne les points $A(2; -3)$, $B(1; -1)$ et $C\,(5; -8)$

1. Les points A, B et C sont-ils alignés ?
2. Déterminer alors les coordonnées de D aligné avec A et B tel que $x_D = x_C = 5$.

☛ **Solution**:

Figure :



1. • Calcul des coordonnées de $\overrightarrow{AB}$
$\begin{cases} x_{\overrightarrow{AB}} = x_B - x_A = 1 - 2 = -1 \\ y_{\overrightarrow{AB}} = y_B - y_A = -1 - (-3) = 2 \end{cases}$
donc $\vec{AB}(-1; 2)$

   • Calcul des coordonnées de $\overrightarrow{AC}$
$\begin{cases} x_{\overrightarrow{AC}} = x_C - x_A = 5 - 2 = 3 \\ y_{\overrightarrow{AC}} = y_C - y_A = -8 - (-3) = -5 \end{cases}$
donc $\vec{AC}(3; -5)$

   • Vérification de la colinéarité
$x_{\overrightarrow{AB}} \times y_{\overrightarrow{AC}} - y_{\overrightarrow{AB}} \times x_{\overrightarrow{AC}}$
$= -1 \times (-5) - 2 \times 3$
$= 5 - 6 = -1$
donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires
donc les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. • Calcul des coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AD}$
$\begin{cases} x_{\overrightarrow{AD}} = x_D - x_A = 5 - 2 = 3 \\ y_{\overrightarrow{AD}} = y_D - y_A = y_D - (-3) = y_D + 3 \end{cases}$
donc $\vec{AD}(3; y_D + 3)$

   • Alignement de A, B et D :
A,B et D sont alignés
$\Longleftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ colinéaires
$\Longleftrightarrow x_{\overrightarrow{AB}} \times y_{\overrightarrow{AD}} - y_{\overrightarrow{AB}} \times x_{\overrightarrow{AD}} = 0$
$\Longleftrightarrow -1 \times (y_D + 3) - 2 \times 3 = 0$
$\Longleftrightarrow -y_D - 3 - 6 = 0$
$\Longleftrightarrow y_D = -9$
donc $D(5; -9)$ est aligné avec A et B.

Remarque

On peut aussi vérifier l'alignement de A, B et C en cherchant l'équation réduite de (AB) et celle-ci existe car $x_A \neq x_B$ donc (AB) n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées.

Equation réduite de (AB) : $y = ax + b$

- Calcul du coefficient directeur
  $a = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{2}{-1} = -2$
- Calcul de b
  $A \in (AB) \iff y_A = -2x_A + b \iff b = -3 + 2 \times 2 = 1$
  donc l'équation réduite de (AB) est $y = -2x + 1$ (penser à contrôler sur le graphique)
- C appartient-il à (AB) ?
  $-2x_C + 1 = -2 \times 5 + 1 = -9 \neq -8$
  donc $C \notin (AB)$
  donc A, B et C ne sont pas alignés.
- $D \in (AB)$
  $\iff y_D = -2x_D + 1$
  $\iff y_D = -2 \times 5 + 1 = -9$

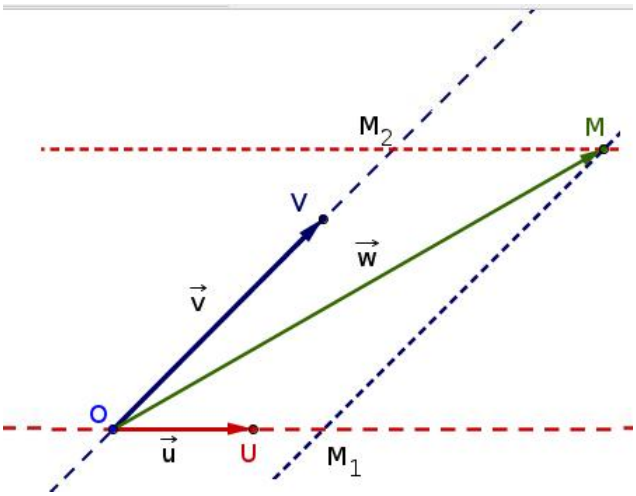
2 Décomposition d'un vecteur

Propriété : Décomposition d'un vecteur
$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs non colinéaires (donc non nuls).
Pour tout vecteur $\overrightarrow{w}$, il existe un couple unique $(x; y)$ de réels tels que $\overrightarrow{w} = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v}$

Démonstration

- Existence

  Soient les points O, U, V et M tels que $\overrightarrow{OU} = \overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{OV} = \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{w}$.



  La parallèle à (OV) passant par M coupe (OU) en M_1 et la parallèle à (OU) passant par M coupe (OV) en M_2 (voir figure)
  On considère le repère $(O; U; V)$ et il existe $(x; y)$ réels tels que $M(x; y)$ dans le repère $(O; U; V)$
  O, U et M_1 sont alignés
  donc $\overrightarrow{OU}$ et $\overrightarrow{OM_1}$ sont colinéaires donc il existe un réel x tel que $\overrightarrow{OM_1} = x\overrightarrow{OU} = x\overrightarrow{u}$
  De même, O, V et M_2 sont alignés donc il existe un réel y tel que $\overrightarrow{OM_2} = y\overrightarrow{OV} = y\overrightarrow{v}$.
  OM_1MM_2 est un parallèlogramme
  donc $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v}$
- Unicité
  Supposons qu'il existe deux couples de réels $(x; y)$ et $(x'; y')$ tels que

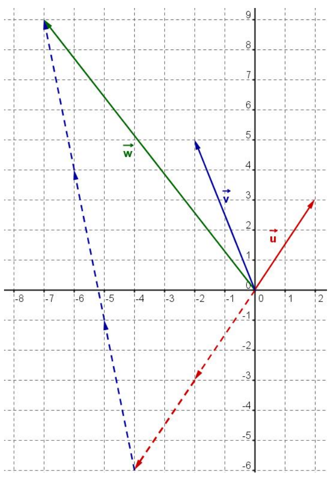
$\overrightarrow{w} = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v} = x'\overrightarrow{u} + y'\overrightarrow{v}$
$\iff (x - x')\overrightarrow{u} + (y - y')\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$
Si $x \neq x'$ alors $x - x' \neq 0$
et donc $\overrightarrow{u} = \dfrac{y - y'}{x - x'}\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ colinéaires, ce qui est contraire à l'hypothèse donc $x = x'$
et donc $(y - y')\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} \iff y - y' = 0 \iff y = y'$ (car $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$)

Exemple 2 : Exprimer un vecteur en fonction de deux vecteurs non nuls
Dans un repère orthonormé, on donne $\overrightarrow{u}(2;3)$, $\overrightarrow{v}(-1;5)$ et $\overrightarrow{w}(-7;9)$.
Exprimer $\overrightarrow{w}$ en fonction de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

☛ **Solution**:

$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires donc il existe un unique couple de réels α et β tels que $\overrightarrow{w} = \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v}$ (propriété ci-dessus).

$\overrightarrow{w} = \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v}$
$\iff \begin{cases} -7 = 2\alpha - \beta \\ 9 = 3\alpha + 5\beta \end{cases}$
$\iff \begin{cases} \beta = 2\alpha + 7 \\ 9 = 3\alpha + 5(2\alpha + 7) \end{cases}$
$\iff \begin{cases} \beta = 2\alpha + 7 \\ 9 = 3\alpha + 5(2\alpha + 7) \end{cases}$
$\iff \begin{cases} 1\beta = 2\alpha + 7 \\ -26 = 13\alpha \end{cases}$
$\iff \begin{cases} 1\beta = 3 \\ -2 = \alpha \end{cases}$
donc $\overrightarrow{w} = -2\overrightarrow{u} + 3\overrightarrow{v}$



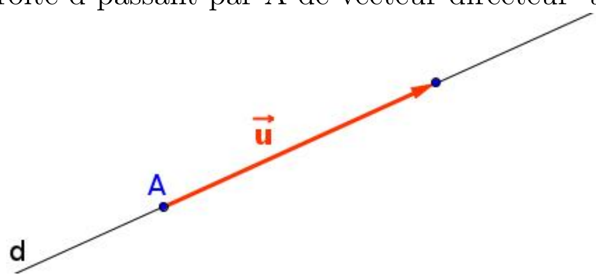
Remarque :
Cela signifie aussi que dans le repère $(O;\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})$, le vecteur $\overrightarrow{w}$ a pour coordonnées $(-2;3)$

3 Equation cartésienne d'une droite

3.1 Vecteur directeur d'une droite

Définition : Vecteur directeur d'une droite
On appelle vecteur directeur d'une droite (d), tout vecteur non nul défini par deux points distincts de la droite (d).

Droite d passant par A de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$:



Remarque
Une droite (d) du plan peut-être définie par deux points distincts ou bien par un point et un vecteur directeur non nul.

3.2 Equation cartésienne d'une droite

Propriété : Equation cartésienne
Toute droite du plan dans un repère $(O; I; J)$ admet une équation appelée équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$.
Le vecteur $\overrightarrow{u}(-b; a)$ est un vecteur directeur de cette droite

Remarques

- Si $a = 0$ et $b \neq 0$ la droite admet une équation cartésienne de la forme $by + c = 0$.
  $by + c = 0 \iff y = \dfrac{-c}{b}$ et elle est parallèle à l'axe des abscisses.
- De même, si $a \neq 0$ et $b = 0$ la droite admet une équation cartésienne de la forme $ax + c = 0$.
  $ax + c = 0 \iff x = \dfrac{-c}{a}$ et elle est parallèle à l'axe des ordonnées.

Démonstration : équation cartésienne d'une droite
Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$

- Calcul des coordonnées de $\overrightarrow{AB}$
  $\begin{cases} x_{\overrightarrow{AB}} = x_B - x_A \\ y_{\overrightarrow{AB}} = y_B - y_A \end{cases}$
- $M(x; y) \in (AB)$
  $\iff \overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ colinéaires
  $\iff (x - x_A)(y_B - y_A) - (y - y_A)(x_B - x_A) = 0$
  $\iff (y_B - y_A)x - x_A y_B + x_A y_A - (x_B - x_A)y + y_A x_B - x_A y_A = 0$
  $\iff (y_B - y_A)x - (x_B - x_A)y - x_A y_B + y_A x_B = 0$
  En posant $a = y_B - y_A$, $b = -(x_B - x_A) = x_A - x_B$ et $c = -x_A y_B + y_A x_B$
  on a donc $M(x; y) \in (AB)$ si et seulement si il existe trois réels a, b et c tels que $ax + by + c = 0$
- $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de la droite (AB)
  et $\overrightarrow{AB}(-b; a)$ puisque $x_B - x_A = -b$ et $y_B - y_A = a$.

3.3 Exemples

Exemple 3 : Déterminer une équation cartésienne d'une droite

1. Droite définie par deux points
Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB) avec $A(2;5)$ et $B(-1;4)$

2. Droite définie par un point et un vecteur directeur
Déterminer une équation cartésienne de la droite Δ passant par $C(-1;4)$ et parallèle à la droite (d) définie par l'équation $3x-2y+6=0$

Méthode 1 :Utilisation du critère de colinéarité

- Déterminer les coordonnées d'un vecteur directeur de la droite (ici $\overrightarrow{AB}$)
- Utiliser le critère de colinéarité
  $M \in (AB)$
  $\iff$ A, M et B alignés
  $\iff$ $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ colinéaires
  $\iff x_{\overrightarrow{AM}} \times y_{\overrightarrow{AB}} - y_{\overrightarrow{AM}} \times x_{\overrightarrow{AB}} = 0$

Méthode 2 : Détermination des coefficients a et b avec les coordonnées d'un vecteur directeur $\overrightarrow{u}(-b;a)$

- Déterminer les coordonnées d'un vecteur directeur de la droite (ici $\overrightarrow{AB}$)
- On a alors $a = y_{\overrightarrow{AB}}$ et $b = -y_{\overrightarrow{AB}}$ et une équation cartésienne de (AB) est $ax+by+c=0$
- Détermination du réel c
  On utilise les coordonnées d'un point de la droite (A par exemple).
  $A \in (AB)$
  $\iff ax_A + by_A + c = 0$ (équation d'inconnue c)

☛ **Solution**:

1. Méthode 1 :

- Calcul des coordonnées d'un vecteur directeur de (AB)
  $\begin{cases} x_{\overrightarrow{AB}} = x_B - x_A = -2-1 = -3 \\ y_{\overrightarrow{AB}} = y_B - y_A = 4-5 = -1 \end{cases}$
  donc $\overrightarrow{AB}(-3;-1)$
- Utilisation du critère de colinéarité
  $M(x;y) \in (AB)$
  $\iff$ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ colinéaires
  $\iff x_{\overrightarrow{AB}} y_{\overrightarrow{AM}} - y_{\overrightarrow{AB}} x_{\overrightarrow{AM}} = 0$
  $\iff -3(y-5) - (-1)(x-2) = 0$
  $\iff x - 3y + 13 = 0$
  Une équation cartésienne de (AB) est $x-3y+13=0$ ou bien encore $-x+3y-13=0$

Méthode 2 :

- Calcul des coordonnées d'un vecteur directeur de (AB)
  $\overrightarrow{AB}(-3;-1)$ (fait dans la méthode 1)
- On a donc $a=-1$ et $b=3$ donc une équation cartésienne de (AB) est de la forme $-x+3y+c=0$

- Calcul de c
  $A \in (AB)$
  $\iff -x_A + 3y_B + c = 0$
  $\iff -2 + 15 + c = 0$
  $\iff c = -13$
  Une équation cartésienne de (AB) est $-x + 3y - 13 = 0$ ou bien encore $-x - 3y + 13 = 0$

Remarques

- Si la droite est définie par un point et un vecteur directeur, il suffit de remplacer le vecteur $\overrightarrow{AB}$ par le vecteur directeur donné.
- Si la droite (AB) n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées ($x_A \neq x_B$), on peut aussi retrouver une équation cartésienne à partir de l'équation réduite.
  Ici, (AB) a pour équation réduite $y = \dfrac{x+13}{3} = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{13}{3}$

2.
- Il faut déterminer les coordonnées d'un vecteur directeur de Δ donc de (d).
  (d) a pour équation $3x - 2y + 6 = 0$ donc $\overrightarrow{u}(2;3)$ ($a = 3$ et $b = -2$) est un vecteur directeur de (d) donc de Δ.
- Utilisation du critère de colinéarité
  $M(x;y) \in \Delta$
  $\iff \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{CM}$ colinéaires
  $\iff x_{\overrightarrow{u}} y_{\overrightarrow{CM}} - y_{\overrightarrow{u}} x_{\overrightarrow{CM}} = 0$
  $\iff 2(y-4) - 3(x+1) = 0$
  $\iff -3x + 2y - 11 = 0$
  Une équation cartésienne de Δ est $-3x + 2y - 11 = 0$ (ou bien $3x - 2y + 11 = 0$).

Remarque

Avec la méthode 2, on peut aussi écrire directement qu'une équation cartésienne de Δ est de la forme $3x - 2y + c = 0$ puisque le vecteur $\overrightarrow{u}(2;3)$ est un vecteur directeur de Δ donc $a = 3$ et $b = -2$.

Il suffit ensuite d'utiliser les coordonnées du point A pour déterminer c soit :

$C \in \Delta \iff 3x_C - 2y_C + c = 0 \iff -3 - 8 + c = 0 \iff c = 11$