Correction exercices supplémentaires – Géométrie plane

Partie A : Coordonnées de vecteurs, colinéarité

Exercice 1

1) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}9\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}21\\5\end{pmatrix}$ or $9\times 5-2\times 21=3\neq 0$ donc les vecteur $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et les points A, B et C ne sont pas alignés.

2) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}9\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}\frac{27}{2}\\3\end{pmatrix}$ or $9\times 3-2\times\frac{27}{2}=0$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont colinéaires et les points A, B et D sont alignés.

Exercice 2

1) $\overrightarrow{EF}:\begin{pmatrix}3-(-7)\\3-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{GH}:\begin{pmatrix}4+8\\-5+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\-4\end{pmatrix}$

Vérifions s'il y a colinéarité : $10\times(-4)-(-3)\times 12=-40+36=-4$

Les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{GH}$ ne sont pas colinéaires donc (EF) et (GH) ne sont pas parallèles.

2) $\overrightarrow{GL}:\begin{pmatrix}x+8\\-4\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{GL}$ sont colinéaires donc $10\times(-4)-(-3)\times(x+8)=0\Leftrightarrow -40+3x+24=0\Leftrightarrow 3x=16\Leftrightarrow x=\frac{16}{3}$

On doit choisir $x=\frac{16}{3}$ pour que (EF) et (GL) soient parallèles.

Exercice 3

1) $A(0;0)$, $B(1;0)$, $C(1;1)$ et $D(0;1)$.

2) E est le symétrique de C par rapport à B donc B est le milieu de $[EC]$ et $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{BE}$.

$\begin{pmatrix}1-1\\0-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_E-1\\y_E-0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}0=x_E-1\\-1=y_E\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_E=1\\y_E=-1\end{cases}$ donc $\boxed{E(1;-1)}$

F est le symétrique de A par rapport à D donc D est le milieu de $[AF]$ et $\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{AD}$.

$\begin{pmatrix}x_F-0\\y_F-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0-0\\1-0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x_F=0\\y_F-1=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_F=0\\y_F=2\end{cases}$ donc $\boxed{F(0;2)}$

$\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x_G-0\\y_G-0\end{pmatrix}=\frac{2}{3}\begin{pmatrix}1-0\\0-0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x_G=\frac{2}{3}\\y_G=0\end{cases}$ donc $\boxed{G\left(\frac{2}{3};0\right)}$

3) $\overrightarrow{EF}:\begin{pmatrix}0-1\\2-(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{FG}:\begin{pmatrix}\frac{2}{3}-0\\0-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\-2\end{pmatrix}$

Vérifions s'il y a colinéarité : $-1\times(-2)-3\times\frac{2}{3}=2-2=0$ donc $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{FG}$ sont colinéaires et E, F et G sont alignés.

Exercice 4

1) $A(0;0)$, $B(1;0)$ et $C(0;1)$.

E est le symétrique de B par rapport à C donc C est le milieu de $[BE]$ et $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{BC}$:

$\begin{pmatrix}x_E-0\\y_E-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0-1\\1-0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x_E=-1\\y_E-1=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_E=-1\\y_E=2\end{cases}$ et donc $\boxed{E(-1;2)}$

$\overrightarrow{AF}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x_F-0\\y_F-0\end{pmatrix}=\frac{3}{2}\begin{pmatrix}0-0\\1-0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x_F=0\\y_F=\frac{3}{2}\end{cases}$ donc $\boxed{F\left(0;\frac{3}{2}\right)}$

$\overrightarrow{BG}=-2\overrightarrow{BA}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x_G-1\\y_G-0\end{pmatrix}=-2\begin{pmatrix}0-1\\0-0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x_G-1=2\\y_G=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_G=3\\y_G=0\end{cases}$ donc $\boxed{G(3;0)}$

2) $\overrightarrow{EF}:\begin{pmatrix}0-(-1)\\\frac{3}{2}-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{FG}:\begin{pmatrix}3-0\\0-\frac{3}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-\frac{3}{2}\end{pmatrix}$

Vérifions s'il y a colinéarité : $1\times\left(-\frac{3}{2}\right)-\left(-\frac{1}{2}\right)\times 3=-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}=0$

Donc $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{FG}$ sont colinéaires et E, F et G sont alignés.

Exercice 5

1) $\overrightarrow{AK} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_K + 2 \\ y_K - 3 \end{pmatrix} = -\frac{3}{2}\begin{pmatrix} 4+2 \\ 4-3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_K + 2 = -\frac{3}{2} \times 6 \\ y_K - 3 = -\frac{3}{2} \times 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_K = -9 - 2 \\ y_K = -\frac{3}{2} + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_K = -11 \\ y_K = \frac{3}{2} \end{cases}$ donc $\boxed{K\left(-11; \frac{3}{2}\right)}$

2) $\overrightarrow{AL} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_L + 2 \\ y_L - 3 \end{pmatrix} = \frac{3}{4}\begin{pmatrix} 3+2 \\ -1-3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_L + 2 = \frac{3}{4} \times 5 \\ y_L - 3 = \frac{3}{4} \times (-4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_L = \frac{15}{4} - 2 \\ y_L = -3 + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_L = \frac{7}{4} \\ y_L = 0 \end{cases}$ donc $\boxed{L = \left(\frac{7}{4}; 0\right)}$

3) $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{6}\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_M - 3 \\ y_M + 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4-3 \\ 4+1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M - 3 = \frac{1}{6} \\ y_M + 1 = \frac{5}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \frac{19}{6} \\ y_M = -\frac{1}{6} \end{cases}$ donc $\boxed{M\left(\frac{19}{6}; -\frac{1}{6}\right)}$

4) $\overrightarrow{KL} : \begin{pmatrix} \frac{7}{4} + 11 \\ 0 - \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{51}{4} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{LM} : \begin{pmatrix} \frac{19}{6} - \frac{7}{4} \\ -\frac{1}{6} - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{17}{12} \\ -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$

Vérifions s'il y a colinéarité : $\frac{51}{4} \times \left(-\frac{1}{6}\right) - \left(-\frac{3}{2}\right) \times \frac{17}{12} = -\frac{51}{24} + \frac{51}{24} = 0$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{KL}$ et $\overrightarrow{LM}$ sont colinéaires et les points K, L et M sont alignés.

Exercice 6

1) $ABCD$ est un parallélogramme $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3-2 \\ -6-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 - x_D \\ -3 - y_D \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 = 10 - x_D \\ -8 = -3 - y_D \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 15 \\ y_D = 5 \end{cases}$ donc $\boxed{D(15; 5)}$

2) $AB = \sqrt{(-3-2)^2 + (-6-2)^2} = \sqrt{25 + 64} = \sqrt{89}$

$AC = \sqrt{(10-2)^2 + (-3-2)^2} = \sqrt{64 + 25} = \sqrt{89}$

$BC = \sqrt{(10+3)^2 + (-3+6)^2} = \sqrt{169 + 9} = \sqrt{178}$

On remarque que $AB = AC$ donc ABC est isocèle en A.

De plus, $BC^2 = 178$ et $AB^2 + AC^2 = 89 + 89 = 178$ donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, ABC est rectangle en A. Finalement ABC est rectangle isocèle en A.

3) $x_I = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{-3+10}{2} = \frac{7}{2}$ et $y_I = \frac{-6-3}{2} = -\frac{9}{2}$ donc $\boxed{I\left(\frac{7}{2}; -\frac{9}{2}\right)}$

4) $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{IA} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_J + 3 \\ y_J + 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 - 10 \\ 5 + 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 - \frac{7}{2} \\ 2 + \frac{9}{2} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_J + 3 = 5 - \frac{3}{2} \\ y_J + 6 = 8 + \frac{13}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_J = \frac{7}{2} - 3 \\ y_J = \frac{29}{2} - 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_J = \frac{1}{2} \\ y_J = \frac{17}{2} \end{cases}$

donc $\boxed{J\left(\frac{1}{2}; \frac{17}{2}\right)}$

5) $\overrightarrow{AI} : \begin{pmatrix} \frac{7}{2} - 2 \\ -\frac{9}{2} - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{13}{2} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{JA} : \begin{pmatrix} 2 - \frac{1}{2} \\ 2 - \frac{17}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{13}{2} \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{JA} = \overrightarrow{AI}$ et A est bien le milieu de $[IJ]$

6) $2\overrightarrow{JK} + 3\overrightarrow{CK} - 2\overrightarrow{AK} = 2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow 2\begin{pmatrix} x_K - \frac{1}{2} \\ y_K - \frac{17}{2} \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} x_K - 10 \\ y_K + 3 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} x_K - 2 \\ y_K - 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 2 - 10 \\ 2 + 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 15 - 10 \\ 5 + 3 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\left(x_K - \dfrac{1}{2}\right) + 3(x_K - 10) - 2(x_K - 2) = 2 \times (-8) + 5 \\ 2\left(y_K - \dfrac{17}{2}\right) + 3(y_K + 3) - 2(y_K - 2) = 2 \times 5 + 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_K - 1 + 3x_K - 30 - 2x_K + 4 = -11 \\ 2y_K - 17 + 3y_K + 9 - 2y_K + 4 = 18 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x_K = 16 \\ 3y_K = 22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_K = \frac{16}{3} \\ y_K = \frac{22}{3} \end{cases}$ donc $\boxed{K\left(\frac{16}{3}; \frac{22}{3}\right)}$

7) $\overrightarrow{DJ} : \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - 15 \\ \frac{17}{2} - 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{29}{2} \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DK} : \begin{pmatrix} \frac{16}{3} - 15 \\ \frac{22}{3} - 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{29}{3} \\ \frac{7}{3} \end{pmatrix}$

Vérifions s'il y a colinéarité : $-\frac{29}{2} \times \frac{7}{3} - \left(\frac{7}{2}\right) \times \left(-\frac{29}{3}\right) = -\frac{203}{6} + \frac{203}{6} = 0$

Donc $\overrightarrow{DJ}$ et $\overrightarrow{DK}$ sont colinéaires et D, J et K sont alignés.

Exercice 7

1) $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = \boxed{-\frac{3}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}}$ et

$$\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \boxed{-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}}$$

2) On a $-3\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MN}$ donc $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{NP}$ sont colinéaires et les points M, N et P sont alignés.

Exercice 8

1)

a. $K\left(0; -\frac{3}{2}\right)$; $L\left(\frac{3}{4}; 0\right)$

Pour les coordonnées de M :

$$\overrightarrow{BM} = \frac{1}{6}\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_M - 1 \\ y_M \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \frac{5}{6} \\ y_M = \frac{1}{6} \end{cases} \text{ donc } M\left(\frac{5}{6}; \frac{1}{6}\right)$$

b. $\overrightarrow{KL}\begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{KM}\begin{pmatrix} \frac{5}{6} \\ \frac{1}{6} + \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{KM}\begin{pmatrix} \frac{5}{6} \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix}$ Vérifions s'il y a colinéarité :

$\frac{3}{4} \times \frac{5}{3} - \frac{3}{2} \times \frac{5}{6} = \frac{15}{12} - \frac{15}{12} = 0$ donc $\overrightarrow{KL}$ et $\overrightarrow{KM}$ sont colinéaires et K, L et M sont alignés.

2)

a. $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AL} = \boxed{\frac{3}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}}$

$$\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) = \boxed{\frac{5}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{3}\overrightarrow{AC}}$$

b. On observe que $\overrightarrow{KL} = \frac{10}{9}\overrightarrow{KM}$ donc $\overrightarrow{KL}$ et $\overrightarrow{KM}$ sont colinéaires et K, L et M sont alignés.

Exercice 9

1)

a. $D\left(0; \frac{1}{2}\right)$; $E\left(\frac{1}{3}; 0\right)$

$$\overrightarrow{BF} = 2\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_F - 1 \\ y_F \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_F = -1 \\ y_F = 2 \end{cases} \text{ donc } F(-1; 2)$$

b. $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ Vérifions s'il y a colinéarité : $\frac{1}{3} \times \frac{3}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) \times (-1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$

Donc $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DF}$ sont colinéaires et D, E et F sont alignés.

2)

a. $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE} = \boxed{-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}}$

$$\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} + 2\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) = \boxed{-\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}}$$

b. On remarque que $\overrightarrow{DF} = -3\overrightarrow{DE}$ donc $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DF}$ sont colinéaires et D, E et F sont alignés.

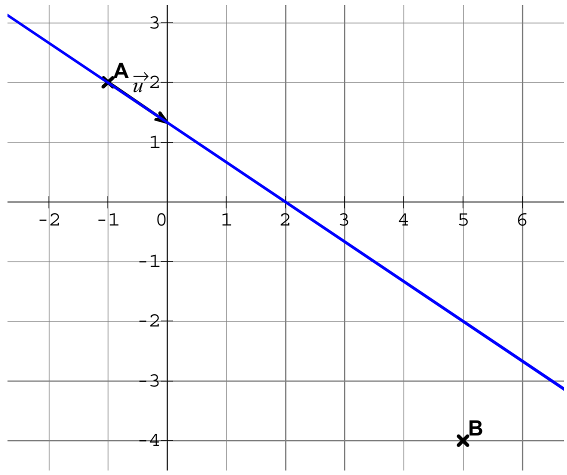
3)

a. Dans le triangle ACI, la droite (DE) passe par le milieu D de $[AC]$ et est parallèle à (CI) donc elle coupe le troisième côté $[AI]$ en son milieu d'après le théorème des milieux. Or cette intersection est en E. Donc E est le milieu de $[AI]$.

b. Nous savons que $AE = \frac{1}{3}AB$ et $AE = EI$ donc $EI = \frac{1}{3}AB$ et alors $IB = AB - AI = \frac{1}{3}AB$. On a donc bien que I est le milieu de $[EB]$.

c. Dans le triangle BEF, (CI) passe par le milieu de $[BF]$ et $[BE]$ donc elle est parallèle au troisième côté (EF) d'après le théorème des milieux.

Finalement, (CI) est parallèle à (DE) par construction et à (EF) donc (DE) et (EF) sont parallèles également et comme elles ont un point commun, on a démontré que D, E et F sont alignés.



Partie B : Equation de droites, vecteur directeur

Exercice 1

1) La droite d passe par $A(-1;2)$ et C tel que $\overrightarrow{AC} = 3\vec{u}$ et alors C a pour coordonnées $(4;-4)$
2) $\overrightarrow{AB}$: $\begin{pmatrix} 5+1 \\ -4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ ne sont clairement pas colinéaires car leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles donc B n'appartient pas à d.

Exercice 2

$A\left(0;\frac{4}{3}\right)$ et $B\left(1;\frac{2}{3}\right)$ appartiennent à d donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d. Ses coordonnées ne sont pas entières. Par contre $3\overrightarrow{AB}$, qui a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ a des coordonnées entières et dirige également d.

Exercice 3

On considère un point $A(a;b)$ de la droite. Alors $B(a+5;b-2)$ appartient également à la droite. Le coefficient directeur de la droite (AB) est alors $\frac{(b-2)-b}{(a+5)-a}$ ou encore $\boxed{-\frac{2}{5}}$

Exercice 4

1) La droite de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ admet pour équation cartésienne : $-bx + ay + c = 0$.

Dans notre cas, nous avons donc $x + 2y + c = 0$ comme équation cartésienne.
De plus, la droite passe par A donc ses coordonnées vérifient l'équation et on obtient : $-3 + 4 + c = 0$ ou encore $c = -1$. Une équation de la droite d est alors $\boxed{x + 2y - 1 = 0}$

2) On considère $M(x;y)$ un point de d. Alors $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x+2 \\ y-2 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$ sont colinéaires et leurs coordonnées sont proportionnelles. On a donc $-\frac{1}{5}(x+2) - 0 = 0$ ou encore $\boxed{x = -2}$

Remarque : la droite d est parallèle à l'axe des ordonnées.

3) On considère un point $M(x;y)$ appartenant à d. Alors $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x \\ y+4 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} 28 \\ 35 \end{pmatrix}$ sont colinéaires et donc $35x - 28(y+4) = 0$ ce qui donne $35x - 28y - 112 = 0$ ou encore en simplifiant par 7 : $\boxed{5x - 4y - 16 = 0}$

Exercice 5

1) Deux droites parallèles ont le même coefficient directeur et donc admettent les mêmes vecteurs directeurs.

Une équation de la droite parallèle à d est donc $2x - y + c = 0$. Or cette droite passe par A donc ses coordonnées vérifient l'équation et $4 + 3 + c = 0$ ou encore $c = -7$. Une équation de la droite cherchée est $\boxed{2x - y - 7 = 0}$

2) Une équation de la droite cherchée est $-3x + 4y + c = 0$. A l'aide des coordonnées de A, on obtient : $-12 + c = 0$ ou encore $c = 12$. Donc on obtient : $\boxed{-3x + 4y + 12 = 0}$

Exercice 6

1) Voir ci-dessous
2) $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{AB}$ donc $ABCD$ a ses côtés (AB) et (CD) parallèles et donc $ABDC$ est un trapèze.

3) $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_D + 5 \\ y_D \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D + 5 = 2 \times 4 \\ y_D = 2 \times (-2) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 3 \\ y_D = -4 \end{cases}$ donc $\boxed{D(3; -4)}$

4) Pour B : $6 \times 2 + 2 - 14 = 12 + 2 - 14 = 0$ donc $\boxed{B \in d}$

Pour D : $6 \times 3 - 4 - 14 = 18 - 4 - 14 = 0$ donc $\boxed{D \in d}$

5) $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (AC) donc une équation cartésienne de (AC) est $4x - 3y + c = 0$.

Comme cette droite passe par A, nous avons $4 \times (-2) - 3 \times 4 + c = 0$ ou encore $c = 20$.

Une équation de (AC) est alors $\boxed{4x - 3y + 20 = 0}$

6) Intersection de (AC) et (BD) :

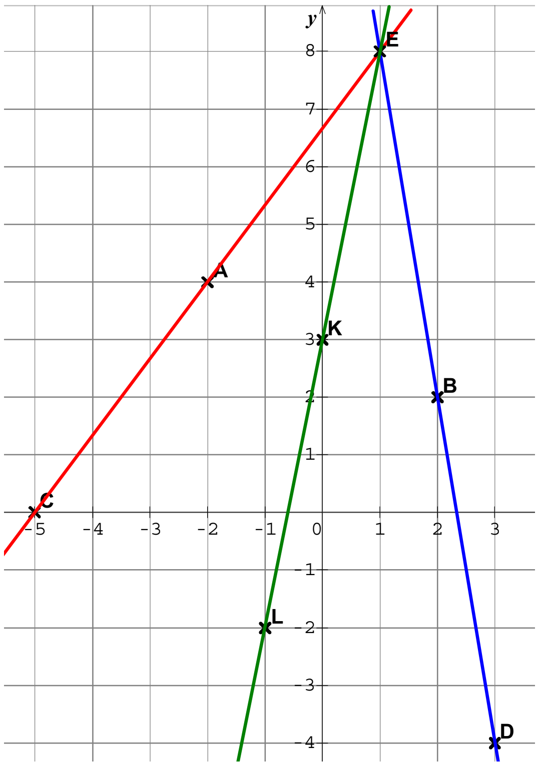
$\begin{cases} 6x + y - 14 = 0 \\ 4x - 3y + 20 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 14 - 6x \\ 4x - 3(14 - 6x) + 20 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 14 - 6x \\ 22x = 22 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 8 \\ x = 1 \end{cases}$

Donc (AC) et (BD) sont bien sécantes en un point E de coordonnées $\boxed{(1; 8)}$

7) Coordonnées de K : $x_K = \frac{x_A + x_B}{2} = 0$ et $y_K = \frac{y_A + y_B}{2} = 3$ donc $\boxed{K(0; 3)}$

De la même manière, on a $\boxed{L(-1; -2)}$



8) $\overrightarrow{EK}\begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EL}\begin{pmatrix} -2 \\ -10 \end{pmatrix}$ On a clairement $\overrightarrow{EL} = 2\overrightarrow{EK}$ donc $\overrightarrow{EL}$ et $\overrightarrow{EK}$ sont colinéaires et les points E, K et L sont alignés.

Exercice 7

1) $\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix} -9 \\ 6 \end{pmatrix}$ dirige d_1 ; $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix}$ dirige d_2 ; $\overrightarrow{u_3}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ dirige d_3 et $\overrightarrow{u_4}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ \frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ dirige d_4.

Nous avons clairement $\overrightarrow{u_1} = 3\vec{u}$ avec $\vec{u}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u_2} = 2\vec{u}$ donc $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ sont colinéaires et d_1 et d_2 sont parallèles.

Par contre $\vec{u}$ et $\overrightarrow{u_3}$ ne sont pas colinéaires donc d_3 n'est pas parallèles à d_1 et d_2.

Pour d_4, étudions la colinéarité de $\overrightarrow{u_4}$ et $\vec{u}$: $-3 \times \frac{2}{\sqrt{3}} + 2\sqrt{3} = -\frac{6\sqrt{3}}{3} + 2\sqrt{3} = -2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 0$

Donc $\overrightarrow{u_4}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires et d_4 est alors parallèle à d_1 et d_2.

2) $A(-3; 0) \in d_1$ Vérifions si A appartient également à d_2 : $-12 + 0 - 5 \neq 0$ donc $A \notin d_1$ donc d_1 et d_2 sont strictement parallèles et pas confondues.

Vérifions ensuite si A appartient à d_4 : $-\frac{6}{\sqrt{3}} + 2\sqrt{3} = -\frac{6\sqrt{3}}{3} + 2\sqrt{3} = 0$ donc A appartient bien à d_4. Nous avons donc que d_1 et d_4 sont confondues.

Exercice 8

1) Un vecteur directeur de d est $\vec{v}\begin{pmatrix} -m \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\vec{u}$ dirige $d \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires $\Leftrightarrow 3 + 2m = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{3}{2}$

$\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ dirige d si et seulement si m a pour valeur $\boxed{-\frac{3}{2}}$.

2) $A \in d \Leftrightarrow -2 + 3m + 3 = 0 \Leftrightarrow \boxed{m = -\frac{1}{3}}$

3) d est parallèle à la droite d'équation $3x - y = 0$ qui admet $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ comme vecteur directeur. Donc une équation de d est $3x - y + c = 0$. En divisant par 3 (pour obtenir un coefficient 1 devant x), on a $x - \frac{1}{3}y + \frac{c}{3} = 0$. Par identification avec l'équation de d donnée dans l'énoncé, on a $\boxed{m = -\frac{1}{3}}$ et $c = 9$.

4) d est parallèle à l'axe des abscisses si et seulement si elle admet une équation réduite de la forme $y = c$. Ceci n'est pas possible car l'équation cartésienne de d contient des x.

5) d est parallèle à l'axe des ordonnées si et seulement si elle admet une équation réduite de la forme $x = c$. Ceci n'est possible que si $\boxed{m = 0}$

6) $O(0;0) \in d \Leftrightarrow 3 = 0$
Cette dernière égalité est fausse donc d ne peut jamais passer par l'origine du repère.

7) $J(0;1) \in d \Leftrightarrow m + 3 = 0 \Leftrightarrow \boxed{m = -3}$

Exercice 9

1) $E(0;y)$ $F(x;1)$ $G(1;y)$ et $H(x;0)$

2) (EF) et (GH) parallèles $\Leftrightarrow \overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}x\\1-y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{GH}\begin{pmatrix}x-1\\-y\end{pmatrix}$ colinéaires $\Leftrightarrow -xy - (x-1)(1-y) = 0$
$\Leftrightarrow -xy - (x - xy - 1 + y) = 0 \Leftrightarrow -x - y + 1 = 0 \Leftrightarrow \boxed{x + y = 1}$

3) (EF) et (GH) sont parallèles si et seulement si $x + y = 1$, autrement dit si et seulement si les coordonnées de M vérifient l'équation $x + y = 1$. Or cette équation est celle de la droite (BD). Finalement (EF) et (GH) sont parallèles si et seulement si $M \in [BD]$.

Exercice 10

1) $d_0 : 2x + 1 = 0$ ou encore $x = -\frac{1}{2}$ (en noir)
$d_1 : 4x - y + 1 = 0$ ou encore $y = 4x + 1$ (en rouge)
$d_2 : 6x - 2y + 1 = 0$ ou encore $y = 3x + \frac{1}{2}$ (en bleu)
$d_{-1}: y + 1 = 0$ ou encore $y = -1$ (en rose)

2) Graphiquement, les quatre droites d_m tracées passent par $I\left(-\frac{1}{2};-1\right)$. Vérifions si c'est le cas pour toute valeur de m :

$$(2m-1) \times \left(-\frac{1}{2}\right) - m \times (-1) + 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = -m + \frac{1}{2} + m - \frac{3}{2} + 1 = 0$$

Donc, pour tout $m \in \mathbb{R}$, d_m passe par $I\left(-\frac{1}{2};-1\right)$

3) $A(-1;4) \in d_m \Leftrightarrow (2m-1) \times (-1) - 4m - 3 - 1 = 0 \Leftrightarrow -6m - 3 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$
A appartient à d_m si et seulement si $m = \frac{1}{2}$.

4) Une équation cartésienne de d_m est $(2m+2)x - my + 1 = 0$. Un vecteur directeur de d_m est donc $\overrightarrow{u_m}\begin{pmatrix}m\\2m+2\end{pmatrix}$.
$\vec{u}$ dirige $d_m \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\overrightarrow{u_m}$ colinéaires $\Leftrightarrow 2(2m+2) + m = 0$

$$\Leftrightarrow m = -\frac{4}{5}$$

Donc, pour $m = -\frac{4}{5}$, $\vec{u}$ dirige d_m.