1

Thomas a 13 ans et demi.
Il dispose de 800 € d'économies.
Ses parents décident de placer cet argent sur un livret à intérêts composés au taux annuel de 4,5 %.

1 Calculer, au centime d'euro près, le capital dont il disposera au bout de trois ans, c'est-à-dire sa valeur acquise au bout de trois ans.

2 On considère la fonction f définie sur $[\,0\,;18\,]$ par :

$$f(x) = 800 \times 1{,}045^x.$$

Le nombre $f(x)$ représente la valeur acquise d'un capital de 800 € placé pendant une durée x, en année, au taux annuel de 4,5 %.

a. Calculer la valeur acquise par le capital lorsque Thomas atteindra sa majorité, soit dans quatre ans et demi.

b. Combien d'années Thomas devra-t-il patienter pour voir doubler son capital initial ?

2

Écrire simplement, sous la forme e^k :

$$A = \frac{e^2 \times e^3}{(e^{-1})^3} \quad \text{et} \quad B = (e^3)^{-1} \times \frac{e^4}{e^{-2}}.$$

3

Justifier les factorisations ou développements obtenus à l'aide du calcul formel :

$\text{factor}\left(e^{2\cdot x}+2\cdot e^x+1\right)$	$\left(e^x+1\right)^2$
$\text{factor}\left(2\cdot e^{2\cdot x}-3\cdot e^x+1\right)$	$\left(e^x-1\right)\cdot\left(2\cdot e^x-1\right)$
$\text{factor}\left(2\cdot x\cdot e^x-4\cdot e^x\right)$	$2\cdot(x-2)\cdot e^x$
$\text{expand}\left(\left(e^{-x}+1\right)\cdot\left(e^x-1\right)\right)$	$e^x-\frac{1}{e^x}$

4

Résoudre dans $\mathbb{R}$.

a. $e^{3x} = 1$. **b.** $e^{-x+1} = e^2$.

5

Résoudre dans $\mathbb{R}$.

a. $e^{-x+3} = e$. **b.** $e^{-2x} - e^{x+3} = 0$.

6

Résoudre dans $\mathbb{R}$.

a. $3e^x - 3 = 0$. **b.** $e^{-x+3} = \frac{1}{e}$.

7

a. Montrer que :

$$2e^{2x} - e^x - 1 = (e^x - 1)(2e^x + 1).$$

b. En déduire la résolution de l'équation :

$$2e^{2x} - e^x - 1 = 0.$$

8

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^x + x - 1.$$

1 À l'aide d'une calculatrice graphique, conjecturer le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

2 Calculer $f'(x)$ et en étudier le signe sur $\mathbb{R}$.

3 Démontrer la conjecture émise à la question **1**.

9

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = (2x+1)e^x.$$

1 Justifier que $g'(x) = (2x+3)e^x$.

2 Étudier le signe de $g'(x)$ sur $\mathbb{R}$.

3 En déduire le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$.

4 Soit $h(x) = (2x-1)e^x$ sur $\mathbb{R}$.
Justifier que $h'(x) = g(x)$ et en déduire le sens de variation de h et la convexité de sa courbe représentative $\mathscr{C}_h$.

10

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-10\,;3\,]$ par :

$$f(x) = 0{,}5x + 4 - 0{,}5e^x.$$

1 Calculer $f'(x)$.
Étudier le signe de la dérivée.
En déduire le tableau de variations de la fonction f.
On calculera les valeurs aux bornes de l'intervalle, avec une précision de 0,1.

2 En étudiant la propriété des valeurs intermédiaires, justifier l'existence des deux solutions à l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle $[-10\,;3\,]$, trouvées à l'aide du calcul formel ci-dessous :

$$\text{solve}\left(0.5\cdot x+4-0.5\cdot e^x=0,x\right)$$
$$x=-7.99966 \text{ or } x=2.33559$$

11

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = (2x+1)e^{-0{,}5x}$.

1 Justifier les résultats obtenus par calcul formel ci-contre.
Justifier que la dérivée f' de la fonction f a le même signe que $1{,}5 - x$.

1	f(x):=(2x+1)*exp(-0.5*x)
	x −> (2·x+1)·exp((-0.5)·x)
2	deriver(f(x))
	(-x+1.5)·exp(-0.5·x)
3	deriver(deriver(f(x)))
	0.5·(x-3.5)·exp(-0.5·x)

2 Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

3 Montrer que la courbe représentative de f admet un point d'inflexion que l'on précisera.

12 Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = e^{2x} - 2x + 1 .$$

1 a. Calculer $g'(x)$.

b. Étudier le signe de $g'(x)$ sur $\mathbb{R}$.

c. En déduire le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$. On précisera la valeur $g(0)$.

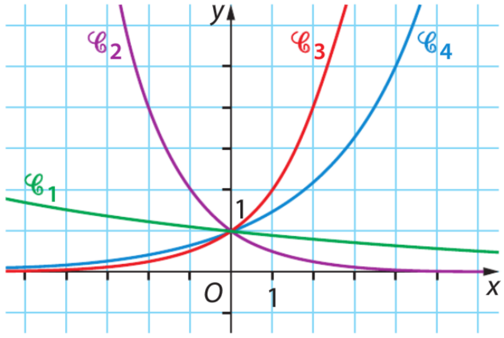
d. Justifier que la fonction g est convexe sur $\mathbb{R}$.

2 Dresser le tableau de signes de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

3 Soit $h(x) = 0{,}5\, e^{2x} - x^2 + x$ sur $\mathbb{R}$.
Justifier que la courbe représentative de la fonction h admet un point d'inflexion.

25 Associer courbes et fonctions

On considère les fonctions f , g , h et k définies sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = 2^x$; $g(x) = 1{,}5^x$; $h(x) = 0{,}5^x$; $k(x) = 0{,}9^x$.
À chaque courbe, associer la fonction qu'elle représente.



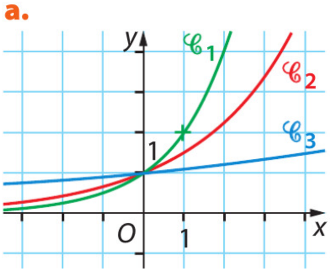
26 Comparer les nombres q

Dans chaque cas, on considère trois nombres q_1 , q_2 et q_3 et les fonctions f_1 , f_2 et f_3 définies sur $\mathbb{R}$ par :

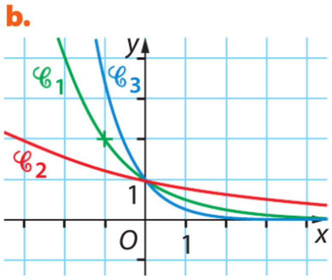
$$f_1(x) = {q_1}^x ; \quad f_2(x) = {q_2}^x \quad \text{et} \quad f_3(x) = {q_3}^x ,$$

de courbes représentatives $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$.
Lire q_1. Comparer les nombres q_1 , q_2 et q_3 .

a.



b.



28 Transformer des expressions

Simplifier : $A = \dfrac{2^x \times (2^{3x})^2}{2^{x+3}}$ et $B = \dfrac{1{,}3^{2x} \times (1{,}3)^{-x+2}}{2 \times 1{,}3}$.

29 Calcul de sommes

1 Calculer $1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + q^5 + q^6$, lorsque $q = 2{,}5$ puis lorsque $q = 0{,}93$. *Arrondir à 10^{-2} près.*

2 On rappelle que : $q^{nx} = (q^x)^n$, pour tout n de $\mathbb{N}$.
Montrer que, pour tout réel $x \neq 0$ et $q \neq 1$, on a :

$$1 + q^x + q^{2x} + q^{3x} + q^{4x} + q^{5x} + q^{6x} = \frac{1 - q^{7x}}{1 - q^x} .$$

Sens de variation de f sur $\mathbb{R}$

30 **a.** $f(x) = 0{,}35^x$ **b.** $f(x) = 1{,}94^x$

31 **a.** $f(x) = 0{,}005 \times 2{,}8^x$ **b.** $f(x) = 3\,000 \times 0{,}99^x$

32 Modéliser une évolution

Modéliser chaque évolution par une fonction f de la forme $f(x) = k \times q^x$: préciser les valeurs de k et de q , et le sens de variation de la fonction f .

1 Un jardin est envahi de mousse.
Initialement de 3 m², la surface occupée par la mousse augmente chaque mois de 8 % .

2 On injecte à un patient 2 mL d'un médicament.
Son organisme en assimile 30 % toutes les heures.

33 Taux d'évolution

Une population de 5 millions double en 10 ans.
On note $P(x)$ la population, en million, au bout de x dizaines d'années, avec $P(0) = 5$.

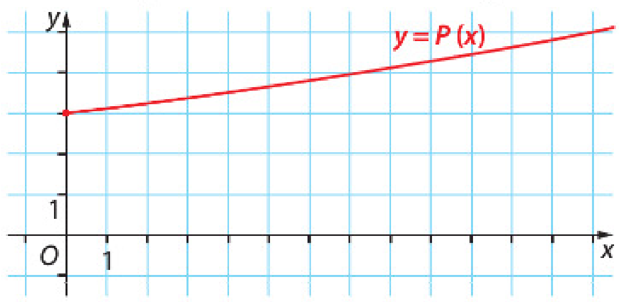
a. Justifier que la population s'écrit $P(x) = 5 \times 2^x$.

b. Calculer la population au bout de 25 ans.

c. Calculer le taux d'évolution annuel de cette population, arrondi à un point de pourcentage près.

34 Production continue en augmentation

Une entreprise fabrique en continu des briques en béton cellulaire, matériau moins cher et plus écologique que le béton traditionnel. Le 1er janvier 2012, elle produit 3 000 briques. Puis on estime que sa production journalière $P(x)$, en millier d'unités, augmente de façon continue chaque mois de 4 % .
Ainsi, au bout de x mois écoulés : $P(x) = 3 \times 1{,}04^x$.
On considère que les mois durent tous 30 jours.



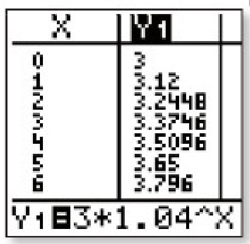
1 a. Calculer les productions au 1er février 2012 et au 15 mars 2012. *Arrondir à 10 briques près.*

b. Déterminer le pourcentage d'augmentation de la production sur 15 jours.
Arrondir le pourcentage à 10^{-2} près.

2 Étudier le sens de variation de la fonction P .

3 a. À l'aide du graphique, préciser le mois durant lequel la production journalière dépasse 4 000 briques.

b. Tabuler à la calculatrice la fonction P sur $[0\,;12]$ par pas de 1.
Retrouver le résultat de la question **a.**



36 Prix d'équilibre

Un éditeur réalise une étude de marché sur la publication de livres pour enfant, dont le prix est compris entre 10 et 30 €.
On estime que, lorsque le prix du livre est x €, l'offre $f(x)$ et la demande $g(x)$, en millier de livres, sont données par : $f(x) = 1{,}05^x$ et $g(x) = \dfrac{7}{1{,}05^x}$.

1 Étudier le sens de variation des fonctions f et g sur l'intervalle $[10 ; 30]$. Interpréter les résultats.

2 On admet que l'équation $f(x) = g(x)$ a une unique solution α sur $[0 ; 10]$.

a. Montrer que α est solution de l'équation :
$$1{,}1025^x = 7.$$

b. À l'aide d'un tableur ou d'une calculatrice, déterminer la valeur arrondie de α à 0,01 près.

3 Quel est le prix d'équilibre ? Quelle est alors la quantité de livres offerte et demandée, à 10 livres près ?

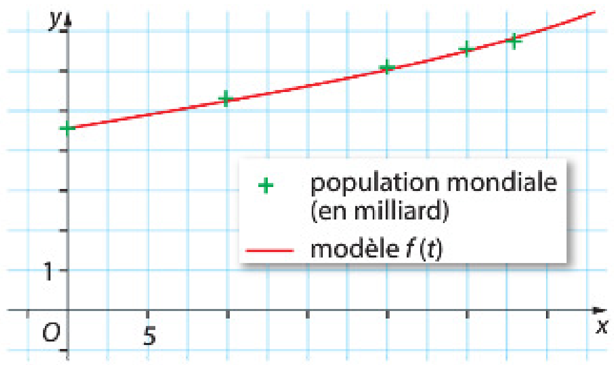
37 Réaliser des prévisions

On s'intéresse à l'évolution de la population mondiale, en milliard, depuis 1980. Le tableau suivant donne la population aux 1ers janviers des années indiquées :

Années	1980	1990	2000	2005	2008
Pop. mondiale (en milliard)	4,5	5,3	6,1	6,5	6,7

Source : Geohive.

Le graphique permet de modéliser la population mondiale $f(t)$, en milliard, en fonction du nombre t d'années écoulées depuis le 1er janvier 1980 par :
$$f(t) = 4{,}54 \times 1{,}014^t.$$



1 L'ONU a estimé que la population mondiale a dépassé 7 milliards au cours de l'année 2011.
Cette estimation est-elle cohérente avec le modèle ?

2 Calculer $\dfrac{f(t+1) - f(t)}{f(t)}$. Interpréter le résultat en termes de taux annuel d'évolution.

3 À l'aide d'une calculatrice, estimer l'année au cours de laquelle la population mondiale devrait dépasser 10 milliards de personnes, selon le modèle.

39 Simplifier avec le nombre e

Écrire sous forme e^k, où k est un entier relatif :

$A = \dfrac{e \times e^2}{e^4}$; $B = (e^{-2})^2 \times e^3$; $C = \dfrac{1}{e^2}$.

40 Écriture simplifiée de nombre

Écrire plus simplement :

$D = \dfrac{e^3 \times (e^{-2})^4 \times e}{e^{-1}}$ et $E = (e^3)^4 \times \dfrac{e^{-2}}{e^5}$.

42 Justifier des égalités

Montrer que pour tout réel x :

a. $(e^x - 1)(e^x + 3) = e^{2x} + 2e^x - 3$.

b. $1 - \dfrac{2e^x}{e^x + 1} = \dfrac{1 - e^x}{1 + e^x}$.

c. $\dfrac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}} = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$.

43 Justifier des résultats

On a effectué des développements par calcul formel :

```
1 simplifier( (e^(2*x) + 1)^2 - (e^(2*x) - 1)^2 )
  4·exp(2·x)
2 simplifier( (e^x+e^(-x))^2 - (e^x-e^(-x))^2 )
  4
```

Écrire les calculs effectués et justifier les résultats obtenus.

44 Calculs de sommes

1 Calculer $1 + e + e^2 + \ldots + e^{10}$ en introduisant une suite géométrique.

2 Soit un réel $x \neq 0$. Montrer que :
$$1 + e^x + e^{2x} + \ldots + e^{11x} = \frac{1 - e^{12x}}{1 - e^x}.$$

3 Simplifier l'écriture de la somme :
$$1 + e^{2x} + e^{4x} + \ldots + e^{10x}, \text{ où } x \neq 0.$$

45 Mettre e^x en facteur

Factoriser :
$f(x) = 2xe^x - x^2e^x$ et $g(x) = e^x - 4x^2e^x$.

46 Factoriser des expressions

Factoriser : $f(x) = x^2e^x - 2xe^x + 3e^x$
et $g(x) = 3x^2e^x + xe^x + e^x$.

Résoudre des équations

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

47 **a.** $e^{2x}-1=0$; **b.** $e^{4x-1}=e^2$.

48 **a.** $(2x-5)(e^x+1)=0$; **b.** $e^{2x+1}=\dfrac{1}{e}$.

49 **a.** $e^{-3x}-1=0$; **b.** $\dfrac{1}{e^{x-2}}+2=0$.

50 **a.** $e^x-xe^x=0$. *On factorisera d'abord.*
b. $x^2e^x-3xe^x+2e^x=0$.

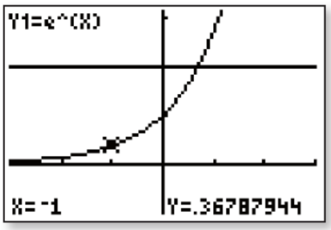
52 Équation d'inconnue e^x

1 Résoudre l'équation $(X-1)(2X+1)=0$.
2 Soit l'équation (E) $2e^{2x}=e^x+1$.
a. En posant $X=e^x$, montrer que l'équation (E) revient à résoudre l'équation de la question **1**.
b. En déduire la résolution de l'équation (E).

53 Résolution approchée

On admet que l'équation $e^x=2$ n'a qu'une seule solution α. (On en verra la solution exacte dans le chapitre 4.)

1 On a tracé ci-contre la courbe de la fonction exponentielle et la droite d'équation $y=2$.
Encadrer α entre deux entiers consécutifs.



2 En utilisant le solveur graphique de la calculatrice, donner la valeur arrondie de α à 0,001 près.

Calculs de dérivées

Dériver les fonctions sans s'occuper de l'ensemble de définition.

56 $f(x)=e^x+x^2$ et $g(x)=(x-2)e^x$.

57 $f(x)=3x^2-2e^x$ et $g(x)=(4-x^2)e^x$.

58 $f(x)=(x^2+3x+1)e^x$ et $g(x)=x^3e^x$.

59 $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$ et $g(x)=\dfrac{x}{e^x}$.

60 $f(x)=\dfrac{e^x}{x+2}$ et $g(x)=\dfrac{x+2}{e^x}$.

61 $f(x)=\dfrac{e^x+1}{e^x}$ et $g(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$.

63 **a.** $(x-2)e^x \geqslant 0$; **b.** $\dfrac{-0{,}5x+3}{e^x} \geqslant 0$.

64 **a.** $(4-x^2)e^x \geqslant 0$; **b.** $\dfrac{1-e^x}{e^x+1} \geqslant 0$.

Tableaux de signes

Dresser le tableau de signes de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.
On ne doit pas calculer la dérivée $f'(x)$.

65 $f(x)=(2x^2+3x-5)e^x$.

66 $f(x)=\dfrac{-x^2+4x-4}{e^x+3}$.

67 $f(x)=(2x+5)(e^x+1)$.

68 $f(x)=(3x-6)(e^x-e)$.

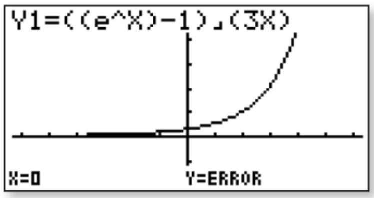
69 $f(x)=(4x^2-3x-1)(e^x-e^2)$.

70 $f(x)=(e^x+3)(e^x-e^2)$.

71 Prolongement par continuité

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ par :

$$f(x)=\frac{e^x-1}{2x}.$$



Sa courbe représentative $\mathscr{C}$ est visualisée à l'écran d'une calculatrice.
a. Expliquer la réponse donnée par la calculatrice pour $x=0$.
b. On cherche une fonction g définie sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \neq 0$, on a $g(x)=f(x)$.
À l'aide de la calculatrice, rechercher quelle valeur donner à $g(0)$ pour que la fonction g soit continue en 0.
c. Étudier le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Étude de variations

Étudier les variations de la fonction f définie sur l'intervalle donné.

72 $f(x)=3e^x+2x$ sur $[0;5]$.

73 $f(x)=3e^x-3x+1$ sur $[-1;3]$.

74 $f(x) = (2x+3)\,\mathrm{e}^x$ sur $\mathbb{R}$.

75 $f(x) = (x^2 - 9x + 19)\,\mathrm{e}^x$ sur $[0\,;6]$.

76 $f(x) = \dfrac{-x^2 + x + 5}{\mathrm{e}^x}$ sur $[-2\,;4]$.

77 $f(x) = \dfrac{2\,\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$ sur $[0\,;10]$.

78 $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{\mathrm{e}^x}$ sur $[-4\,;1]$.

79 Doublement de population

Une population de bactéries est modélisée par : $f(x) = 2 \times \mathrm{e}^x$, où x est le temps en heure depuis le début du protocole.
La population est exprimée en millier.

1 **a.** Calculer la population au bout de 6 h, arrondie au millier près.
b. Calculer la population au bout de 2 h 30.

2 **a.** Calculer $f'(x)$, où f' est la dérivée de f.
b. Le rythme de croissance d'une population est sa dérivée. Calculer le rythme de croissance au bout de 2 h 30, en millier par heure. *Arrondir à 5 min près.*

3 **a.** Simplifier $\dfrac{f(x+1) - f(x)}{f(x)}$, taux de variation de la population entre les instants x et $x+1$.
En déduire le taux d'évolution horaire de cette population.
b. Calculer le taux d'évolution pour 10 min, soit un sixième d'heure.

4 À l'aide des fonctionnalités d'une calculatrice, déterminer le temps nécessaire pour que cette population double.

80 Interpréter graphiquement

La fonction f est définie sur $[-5\,;5]$ par :
$$f(x) = (3 - x^2)\,\mathrm{e}^x.$$
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f.

1 **a.** Montrer que $f'(x) = \mathrm{e}^x(-x^2 - 2x + 3)$.
b. En déduire le signe de $f'(x)$ sur $[-5\,;5]$, puis dresser le tableau de variations de f.
c. La courbe $\mathscr{C}$ admet-elle des tangentes horizontales ?

2 **a.** Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
b. Indiquer les coordonnées du point d'intersection entre la tangente T et l'axe des abscisses.
On note ce point I.

3 Tracer T et $\mathscr{C}$, en plaçant le point I sur le graphique.

82 Variations pour connaître le signe

PARTIE A

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$g(x) = \mathrm{e}^x - x + 1.$$
a. Calculer $g'(x)$.
b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\mathrm{e}^x - 1 \geqslant 0$.
c. Dresser le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$.
Préciser la valeur de $g(0)$ et en déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$.

PARTIE B

On considère maintenant la fonction f définie sur l'intervalle $[-1\,;+\infty[$ par $f(x) = x + 1 + \dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f.

1 **a.** Montrer que pour tout réel $x \geqslant -1$, on a $f'(x) = \dfrac{g(x)}{\mathrm{e}^x}$.
b. En utilisant les résultats de la question **2** de la Partie A, préciser le signe de $f'(x)$ et les variations de la fonction f sur $[-1\,;+\infty[$.

2 Déterminer une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

3 **a.** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution x_0 dans $[-1\,;0]$.
b. Justifier que $-0{,}5 < x_0 < -0{,}4$.
c. En déduire le signe de $f(x)$ sur $[-1\,;+\infty[$.

4 Tracer la droite T et la courbe $\mathscr{C}$ sur $[-1\,;4]$.
On placera x_0 sur le graphique.

83 Prix d'équilibre

Une entreprise fabrique et vend des fourchettes, dont le prix unitaire est compris entre 1 et 4 €. On estime que pour un prix unitaire de x euros :
- l'offre $f(x)$, en dizaine de milliers de fourchettes, est : $f(x) = 0{,}05\,\mathrm{e}^x$.
- la demande $g(x)$, en dizaine de milliers de fourchettes, est :
$$g(x) = \frac{5}{\mathrm{e}^x}.$$

1 On pose $h(x) = f(x) - g(x)$ sur $[1\,;4]$.
a. Calculer $h'(x)$. On rappelle que $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$.
b. Étudier le signe de $h'(x)$. En déduire le sens de variation de la fonction h sur $[1\,;4]$.

2 On a effectué la recherche suivante à l'aide du logiciel *Xcas* :

```
1 resoudre_numerique(e^x=10)
  2.30258509299
```

a. Justifier que l'équation résolue ci-dessus permet d'obtenir le prix d'équilibre x_0.
b. Lire la valeur arrondie de x_0 au centime près.

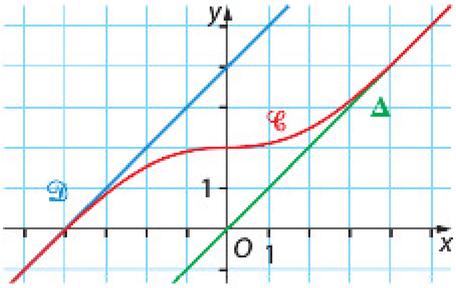
3 Lorsqu'on se trouve à l'équilibre, quelle est l'offre et la demande ? Utiliser la valeur exacte de e^{x_0}.
En déduire le chiffre d'affaires engendré par la vente des fourchettes au prix d'équilibre.

84 Justifier des positions relatives

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x+\dfrac{4}{1+e^x}$.

On a tracé ci-après la courbe $\mathscr{C}$ représentant la fonction f et les droites Δ et $\mathscr{D}$ d'équations respectives :

$$y=x \quad \text{et} \quad y=x+4.$$



1 Conjecturer les positions relatives de la courbe $\mathscr{C}$ avec les droites Δ et $\mathscr{D}$.

Aide Pour l'étude des positions relatives de deux courbes, revoir l'AP page 62.

2 a. Étudier le signe de $f(x)-x$ sur $\mathbb{R}$.
b. En déduire la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite Δ d'équation $y=x$.

3 a. Démontrer que pour tout réel x, on a :

$$f(x)-(x+4)=\frac{-4\,e^x}{1+e^x}.$$

b. En déduire la position relative de $\mathscr{C}$ et de la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y=x+4$.

4 a. On a obtenu l'expression de la dérivée $f'(x)$ par un logiciel de calcul formel. Justifier l'expression obtenue.

```
1 f(x):=x+4/(1+exp(x))
```
$$x \to x+\frac{4}{1+\exp(x)}$$
```
2 deriver(f(x))
```
$$\frac{(\exp(x)-1)^2}{(\exp(x)+1)^2}$$

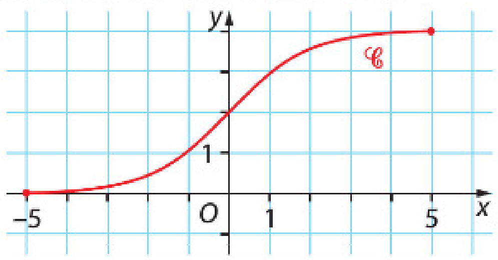
b. En déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
c. Justifier que la courbe $\mathscr{C}$ admet une tangente horizontale.

85 Recherche d'un point d'inflexion

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[-5\,;5]$ par :

$$f(x)=\frac{4e^x}{e^x+1}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f.



1 Démontrer que, pour tout réel x de $[-5\,;5]$:

$$f'(x)=\frac{4e^x}{(e^x+1)^2}.$$

2 Étudier le signe de la dérivée $f'(x)$ sur $[-5\,;5]$.
En déduire le sens de variation de f sur $[-5\,;5]$.

3 a. À l'aide du graphique, estimer l'abscisse du point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}$.

b. À l'aide du logiciel *Xcas*, on a obtenu l'expression de la dérivée seconde $f''(x)$ de f.
Sans justifier le résultat obtenu, étudier le signe de la dérivée seconde $f''(x)$ sur l'intervalle $[-5\,;5]$.

```
1 f(x):=4*exp(x)/(exp(x)+1)
```
$$x \to 4\cdot\left(\frac{\exp(x)}{\exp(x)+1}\right)$$
```
2 deriver(deriver(f(x)))
```
$$\frac{-4\cdot\exp(x)\cdot(\exp(x)-1)}{(\exp(x)+1)^3}$$

c. Déterminer par le calcul l'abscisse du point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}$.

86 Points d'inflexion

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=(x^2+1)\,e^x.$$

1 Visualiser sa courbe représentative $\mathscr{C}$ à l'écran d'une calculatrice dans la fenêtre $[-8\,;2]$.
Conjecturer le nombre de points d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}$. On ne demande pas de valeurs.

2 À l'aide du logiciel TI-Nspire™, on a obtenu l'expression de la dérivée $f'(x)$ et de la dérivée seconde $f''(x)$ de f.

Define $f(x)=(x^2+1)\cdot e^x$	*Terminé*
$\dfrac{d}{dx}(f(x))$	$(x^2+2\cdot x+1)\cdot e^x$
$\dfrac{d^2}{dx^2}(f(x))$	$(x^2+4\cdot x+3)\cdot e^x$

a. Justifier $f'(x)$. Étudier son signe.
En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.
b. Sans justifier le résultat obtenu par le logiciel, étudier le signe de $f''(x)$ sur $[-8\,;2]$.
c. Démontrer la conjecture faite à la question **1**.

Calculs de dérivées

Dériver les fonctions. On factorisera au maximum les expressions obtenues.

88 $f(x)=e^{3x}+2$ et $g(x)=10\,e^{-0{,}5x}$.

89 $f(x)=x\,e^{-x}$ et $g(x)=e^{-x^2+x}$.

90 $f(x)=(2x-3)\,e^{-0{,}1x}$ et $g(x)=(5-0{,}1x)\,e^{2x}$.

91 $f(x)=4x\,e^{-x+1}$ et $g(x)=3\,e^{1-x^2}$.

92 $f(x)=(x^2+1)\,e^{-x}$ et $g(x)=e^{\frac{1-x}{2}}$.

93 $f(x)=\exp\left(\dfrac{x-3}{x-1}\right)$ et $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{\frac{-x^2}{2}}$.

Étude de variations

Étudier les variations de la fonction f définie sur l'intervalle donné.

94 $f(x)=5\,e^{-2x}$ sur $\mathbb{R}$.

95 $f(x)=100\,e^{-0{,}5x+1{,}5}$ sur $\mathbb{R}$.

96 $f(x)=(e-1)\,e^{2x+1}$ sur $\mathbb{R}$.

97 $f(x)=0{,}01\,e^{1{,}2x}+2x$ sur $[0\,;20]$.

98 $f(x)=(4-x)\,e^{x/2}$ sur $[0\,;4]$.

99 $f(x)=\dfrac{10}{1+2\,e^{-0{,}2x}}$ sur $[-2\,;10]$.

100 $f(x)=\dfrac{25}{5+2\,e^{-0{,}5x}}$ sur $[0\,;15]$.

101 $f(x)=\exp\left(\dfrac{x^2}{x-1}\right)$ sur $]-\infty\,;1]$.

102 Réaliser une prévision

Le glacier d'Aletsch, classé à l'UNESCO, est le plus grand glacier des Alpes. Situé dans le sud de la Suisse, il alimente la vallée du Rhône.

Pour étudier le recul de ce glacier au fil des années, une première mesure a été effectuée en 1900 : ce glacier mesurait alors 25,6 km de long.
Des relevés ont ensuite été effectués tous les 20 ans, ce qui permet de modéliser la longueur du glacier $f(t)$, en km, en fonction du nombre t d'années écoulées depuis 1900 par $f(t)=25{,}6-0{,}2\times e^{0{,}025t}$.

1 **a.** Calculer la dérivée de la fonction f sur $[0\,;+\infty[$.
b. En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$. Interpréter.
2 Estimer, selon le modèle, la longueur du glacier en 2013.
3 À l'aide de la calculatrice, estimer l'année de disparition du glacier. *Arrondir à l'unité près.*
4 Le modèle est-il valable sur $[0\,;+\infty[$? Argumenter.

103 Décote exponentielle

On estime que la cote Argus, en euro, de la voiture de Lydia, mise en circulation au 1er mars 2009 est
$$f(x)=26\,315\times e^{-0{,}15x},$$
où x est le temps écoulé depuis le 1er mars 2009, en année.
$f(x)$ est la valeur de revente de la voiture à l'instant x.

1 Calculer et interpréter $f(0)$.
2 Étudier le sens de variation de f sur $[0\,;20]$. Interpréter.
3 **a.** Calculer $\dfrac{f(x+1)-f(x)}{f(x)}$.
En déduire le taux de diminution annuelle de la valeur de la voiture, arrondi à un point de pourcentage près.
b. Lydia revend sa voiture au 1er septembre 2013, dans un état impeccable. Calculer la cote Argus de sa voiture, sans décote de kilométrage, arrondie à 100 € près.
Calculer alors le taux de diminution de la valeur de la voiture depuis son achat. *Arrondir à un point de pourcentage près.*
c. Calculer le taux de diminution de la cote sur six mois. *Arrondir à un point de pourcentage près.*

104 Croissance exponentielle

Sur la période 2001-2008, on modélise le nombre de domaines sur Internet en « .fr », exprimé en millier, par la fonction f définie par $f(x)=86{,}6\,e^{0{,}35x}$, où x désigne le nombre d'années écoulées depuis le 1er janvier 2001.
On fait l'hypothèse que le modèle reste valable jusqu'en 2020, c'est-à-dire que la fonction f est définie sur l'intervalle $[0\,;19]$.

1 **a.** Déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;19]$. Interpréter.
b. Calculer $\dfrac{f(x+1)-f(x)}{f(x)}$.
Interpréter le nombre obtenu en termes de variation relative, puis de taux d'évolution en pourcentage, arrondi à un point de pourcentage près.
2 Calculer $f(8{,}5)$. Interpréter le résultat.
3 **a.** Montrer que l'équation $f(x)=10\,000$ admet une unique solution x_0 dans $[0\,;19]$.
Donner la valeur arrondie de x_0 à $\dfrac{1}{12}$ près.

Voir Savoir faire page 73

b. En déduire l'ensemble solution, dans $[0\,;19]$, de l'inéquation $f(x)\geqslant 10\,000$.
Exprimer le résultat en fonction de x_0.
c. Selon le modèle, à partir de quelle année et en quel mois le nombre de domaines en « .fr » dépassera-t-il 10 millions ?
4 Montrer que $f(x)$ peut s'écrire sous la forme :
$$f(x)=K\times q^x,\text{ avec K et } q \text{ nombres réels.}$$