1 Thomas a 13 ans et demi.
Il dispose de 800 € d'économies.
Ses parents décident de placer cet argent sur un livret à intérêts composés au taux annuel de 4,5 % .

1 Calculer, au centime d'euro près, le capital dont il disposera au bout de trois ans, c'est-à-dire sa valeur acquise au bout de trois ans.

2 On considère la fonction f définie sur $[\,0\,;18\,]$ par :

$$f(x)=800\times 1{,}045^x .$$

Le nombre $f(x)$ représente la valeur acquise d'un capital de 800 € placé pendant une durée x , en année, au taux annuel de 4,5 % .

a. Calculer la valeur acquise par le capital lorsque Thomas atteindra sa majorité, soit dans quatre ans et demi.

b. Combien d'années Thomas devra-t-il patienter pour voir doubler son capital initial ?

2 Écrire simplement, sous la forme e^k :

$$A=\frac{e^2\times e^3}{(e^{-1})^3} \quad \text{et} \quad B=(e^3)^{-1}\times\frac{e^4}{e^{-2}} .$$

3 Justifier les factorisations ou développements obtenus à l'aide du calcul formel :

$\text{factor}\left(e^{2\cdot x}+2\cdot e^x+1\right)$	$\left(e^x+1\right)^2$
$\text{factor}\left(2\cdot e^{2\cdot x}-3\cdot e^x+1\right)$	$\left(e^x-1\right)\cdot\left(2\cdot e^x-1\right)$
$\text{factor}\left(2\cdot x\cdot e^x-4\cdot e^x\right)$	$2\cdot(x-2)\cdot e^x$
$\text{expand}\left(\left(e^{-x}+1\right)\cdot\left(e^x-1\right)\right)$	$e^x-\dfrac{1}{e^x}$

4 Résoudre dans $\mathbb{R}$.

a. $e^{3x}=1$. **b.** $e^{-x+1}=e^2$.

5 Résoudre dans $\mathbb{R}$.

a. $e^{-x+3}=e$. **b.** $e^{-2x}-e^{x+3}=0$.

6 Résoudre dans $\mathbb{R}$.

a. $3e^x-3=0$. **b.** $e^{-x+3}=\dfrac{1}{e}$.

7 **a.** Montrer que :

$$2e^{2x}-e^x-1=(e^x-1)(2e^x+1) .$$

b. En déduire la résolution de l'équation :

$$2e^{2x}-e^x-1=0 .$$

8 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=e^x+x-1 .$$

1 À l'aide d'une calculatrice graphique, conjecturer le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

2 Calculer $f'(x)$ et en étudier le signe sur $\mathbb{R}$.

3 Démontrer la conjecture émise à la question **1** .

9 On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x)=(2x+1)e^x .$$

1 Justifier que $g'(x)=(2x+3)e^x$.

2 Étudier le signe de $g'(x)$ sur $\mathbb{R}$.

3 En déduire le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$.

4 Soit $h(x)=(2x-1)e^x$ sur $\mathbb{R}$.
Justifier que $h'(x)=g(x)$ et en déduire le sens de variation de h et la convexité de sa courbe représentative $\mathscr{C}_h$.

10 On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-10\,;3\,]$ par :

$$f(x)=0{,}5x+4-0{,}5\,e^x .$$

1 Calculer $f'(x)$.
Étudier le signe de la dérivée.
En déduire le tableau de variations de la fonction f .
On calculera les valeurs aux bornes de l'intervalle, avec une précision de 0,1 .

2 En étudiant la propriété des valeurs intermédiaires, justifier l'existence des deux solutions à l'équation $f(x)=0$ sur l'intervalle $[-10\,;3\,]$, trouvées à l'aide du calcul formel ci-dessous :

$$\text{solve}\left(0.5\cdot x+4-0.5\cdot e^x=0,x\right)$$
$$x=-7.99966 \text{ or } x=2.33559$$

11 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=(2x+1)e^{-0{,}5x}$.

1 Justifier les résultats obtenus par calcul formel ci-contre.
Justifier que la dérivée f' de la fonction f a le même signe que $1{,}5-x$.

1	f(x):=(2x+1)*exp(-0.5*x)
	x ->(2· x+1)· exp((-0.5)· x)
2	deriver(f(x))
	(-x+1.5)· exp(-0.5· x)
3	deriver(deriver(f(x)))
	0.5· (x-3.5)· exp(-0.5· x)

2 Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

3 Montrer que la courbe représentative de f admet un point d'inflexion que l'on précisera.

12 Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = e^{2x} - 2x + 1 .$$

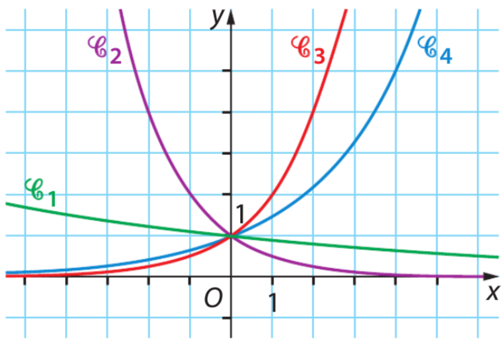
1 **a.** Calculer $g'(x)$.
b. Étudier le signe de $g'(x)$ sur $\mathbb{R}$.
c. En déduire le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$.
On précisera la valeur $g(0)$.
d. Justifier que la fonction g est convexe sur $\mathbb{R}$.

2 Dresser le tableau de signes de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

3 Soit $h(x) = 0{,}5\,e^{2x} - x^2 + x$ sur $\mathbb{R}$.
Justifier que la courbe représentative de la fonction h admet un point d'inflexion.

25 Associer courbes et fonctions

On considère les fonctions f , g , h et k définies sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = 2^x$; $g(x) = 1{,}5^x$; $h(x) = 0{,}5^x$; $k(x) = 0{,}9^x$.
À chaque courbe, associer la fonction qu'elle représente.



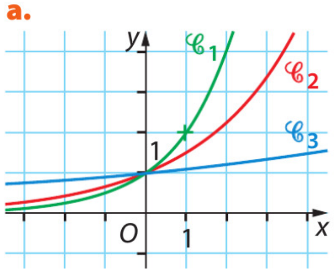
26 Comparer les nombres q

Dans chaque cas, on considère trois nombres q_1 , q_2 et q_3 et les fonctions f_1 , f_2 et f_3 définies sur $\mathbb{R}$ par :

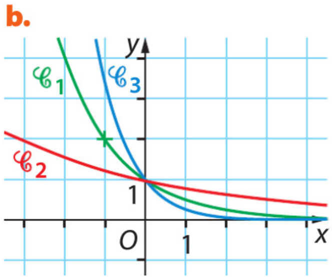
$$f_1(x) = q_1{}^x ; \quad f_2(x) = q_2{}^x \quad \text{et} \quad f_3(x) = q_3{}^x ,$$

de courbes représentatives $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$.
Lire q_1. Comparer les nombres q_1 , q_2 et q_3 .

a.



b.



28 Transformer des expressions

Simplifier : $A = \dfrac{2^x \times (2^{3x})^2}{2^{x+3}}$ et $B = \dfrac{1{,}3^{2x} \times (1{,}3)^{-x+2}}{2 \times 1{,}3}$.

29 Calcul de sommes

1 Calculer $1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + q^5 + q^6$, lorsque $q = 2{,}5$ puis lorsque $q = 0{,}93$. *Arrondir à 10^{-2} près.*

2 On rappelle que : $q^{nx} = (q^x)^n$, pour tout n de $\mathbb{N}$.
Montrer que, pour tout réel $x \neq 0$ et $q \neq 1$, on a :

$$1 + q^x + q^{2x} + q^{3x} + q^{4x} + q^{5x} + q^{6x} = \frac{1 - q^{7x}}{1 - q^x} .$$

Sens de variation de f sur $\mathbb{R}$

30 **a.** $f(x) = 0{,}35^x$ **b.** $f(x) = 1{,}94^x$

31 **a.** $f(x) = 0{,}005 \times 2{,}8^x$ **b.** $f(x) = 3\,000 \times 0{,}99^x$

32 Modéliser une évolution

Modéliser chaque évolution par une fonction f de la forme $f(x) = k \times q^x$: préciser les valeurs de k et de q , et le sens de variation de la fonction f .

1 Un jardin est envahi de mousse.
Initialement de 3 m², la surface occupée par la mousse augmente chaque mois de 8 % .

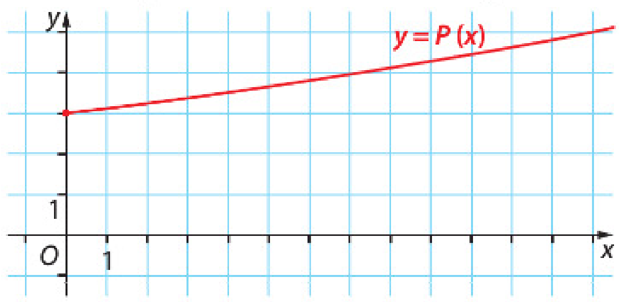
2 On injecte à un patient 2 mL d'un médicament.
Son organisme en assimile 30 % toutes les heures.

33 Taux d'évolution

Une population de 5 millions double en 10 ans.
On note $P(x)$ la population, en million, au bout de x dizaines d'années, avec $P(0) = 5$.
a. Justifier que la population s'écrit $P(x) = 5 \times 2^x$.
b. Calculer la population au bout de 25 ans.
c. Calculer le taux d'évolution annuel de cette population, arrondi à un point de pourcentage près.

34 Production continue en augmentation

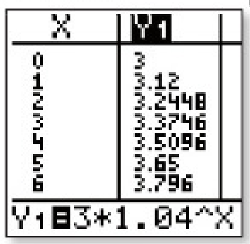
Une entreprise fabrique en continu des briques en béton cellulaire, matériau moins cher et plus écologique que le béton traditionnel. Le 1er janvier 2012, elle produit 3 000 briques. Puis on estime que sa production journalière $P(x)$, en millier d'unités, augmente de façon continue chaque mois de 4 % .
Ainsi, au bout de x mois écoulés : $P(x) = 3 \times 1{,}04^x$.
On considère que les mois durent tous 30 jours.



1 **a.** Calculer les productions au 1er février 2012 et au 15 mars 2012. *Arrondir à 10 briques près.*
b. Déterminer le pourcentage d'augmentation de la production sur 15 jours.
Arrondir le pourcentage à 10^{-2} près.

2 Étudier le sens de variation de la fonction P .

3 **a.** À l'aide du graphique, préciser le mois durant lequel la production journalière dépasse 4 000 briques.
b. Tabuler à la calculatrice la fonction P sur $[0 ; 12]$ par pas de 1.
Retrouver le résultat de la question **a.**



X	Y1
0	3
1	3.12
2	3.2448
3	3.3746
4	3.5096
5	3.65
6	3.796

Y1=3*1.04^X

36 Prix d'équilibre

Un éditeur réalise une étude de marché sur la publication de livres pour enfant, dont le prix est compris entre 10 et 30 €.

On estime que, lorsque le prix du livre est x €, l'offre $f(x)$ et la demande $g(x)$, en millier de livres, sont données par : $f(x)=1{,}05^x$ et $g(x)=\dfrac{7}{1{,}05^x}$.

1 Étudier le sens de variation des fonctions f et g sur l'intervalle $[10\,;30]$. Interpréter les résultats.

2 On admet que l'équation $f(x)=g(x)$ a une unique solution α sur $[0\,;10]$.

a. Montrer que α est solution de l'équation :

$$1{,}1025^x=7.$$

b. À l'aide d'un tableur ou d'une calculatrice, déterminer la valeur arrondie de α à 0,01 près.

3 Quel est le prix d'équilibre ? Quelle est alors la quantité de livres offerte et demandée, à 10 livres près ?

37 Réaliser des prévisions

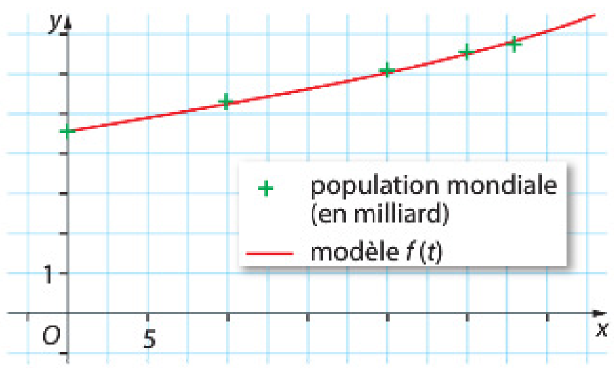
On s'intéresse à l'évolution de la population mondiale, en milliard, depuis 1980. Le tableau suivant donne la population aux 1ers janviers des années indiquées :

Années	1980	1990	2000	2005	2008
Pop. mondiale (en milliard)	4,5	5,3	6,1	6,5	6,7

Source : Geohive.

Le graphique permet de modéliser la population mondiale $f(t)$, en milliard, en fonction du nombre t d'années écoulées depuis le 1er janvier 1980 par :

$$f(t)=4{,}54\times1{,}014^t.$$



1 L'ONU a estimé que la population mondiale a dépassé 7 milliards au cours de l'année 2011.
Cette estimation est-elle cohérente avec le modèle ?

2 Calculer $\dfrac{f(t+1)-f(t)}{f(t)}$. Interpréter le résultat en termes de taux annuel d'évolution.

3 À l'aide d'une calculatrice, estimer l'année au cours de laquelle la population mondiale devrait dépasser 10 milliards de personnes, selon le modèle.

39 Simplifier avec le nombre e

Écrire sous forme e^k, où k est un entier relatif :

$A=\dfrac{e\times e^2}{e^4}$; $B=(e^{-2})^2\times e^3$; $C=\dfrac{1}{e^2}$.

40 Écriture simplifiée de nombre

Écrire plus simplement :

$D=\dfrac{e^3\times(e^{-2})^4\times e}{e^{-1}}$ et $E=(e^3)^4\times\dfrac{e^{-2}}{e^5}$.

42 Justifier des égalités

Montrer que pour tout réel x :

a. $(e^x-1)(e^x+3)=e^{2x}+2e^x-3$.

b. $1-\dfrac{2e^x}{e^x+1}=\dfrac{1-e^x}{1+e^x}$. **c.** $\dfrac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$.

43 Justifier des résultats

On a effectué des développements par calcul formel :

```
1 simplifier( (e^(2*x) + 1)^2 - (e^(2*x) - 1)^2 )
                4· exp(2· x)
2 simplifier( (e^x+e^(-x))^2 - (e^x-e^(-x))^2 )
                4
```

Écrire les calculs effectués et justifier les résultats obtenus.

44 Calculs de sommes

1 Calculer $1+e+e^2+\ldots+e^{10}$ en introduisant une suite géométrique.

2 Soit un réel $x\neq0$. Montrer que :

$$1+e^x+e^{2x}+\ldots+e^{11x}=\frac{1-e^{12x}}{1-e^x}.$$

3 Simplifier l'écriture de la somme :

$$1+e^{2x}+e^{4x}+\ldots+e^{10x}\text{, où } x\neq0.$$

45 Mettre e^x en facteur

Factoriser :

$f(x)=2xe^x-x^2e^x$ et $g(x)=e^x-4x^2e^x$.

46 Factoriser des expressions

Factoriser : $f(x)=x^2e^x-2xe^x+3e^x$
et $g(x)=3x^2e^x+xe^x+e^x$.

Résoudre des équations

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

47 **a.** $e^{2x}-1=0$; **b.** $e^{4x-1}=e^2$.

48 **a.** $(2x-5)(e^x+1)=0$; **b.** $e^{2x+1}=\dfrac{1}{e}$.

49 **a.** $e^{-3x}-1=0$; **b.** $\dfrac{1}{e^{x-2}}+2=0$.

50 **a.** $e^x-xe^x=0$. *On factorisera d'abord.*
b. $x^2e^x-3xe^x+2e^x=0$.

52 Équation d'inconnue e^x

1 Résoudre l'équation $(X-1)(2X+1)=0$.

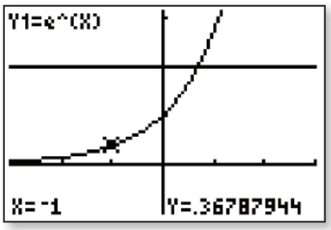
2 Soit l'équation (E) $2e^{2x}=e^x+1$.

a. En posant $X=e^x$, montrer que l'équation (E) revient à résoudre l'équation de la question **1**.

b. En déduire la résolution de l'équation (E).

53 Résolution approchée

On admet que l'équation $e^x=2$ n'a qu'une seule solution α. (On en verra la solution exacte dans le chapitre 4.)



1 On a tracé ci-contre la courbe de la fonction exponentielle et la droite d'équation $y=2$.
Encadrer α entre deux entiers consécutifs.

2 En utilisant le solveur graphique de la calculatrice, donner la valeur arrondie de α à 0,001 près.

Calculs de dérivées

Dériver les fonctions sans s'occuper de l'ensemble de définition.

56 $f(x)=e^x+x^2$ et $g(x)=(x-2)e^x$.

57 $f(x)=3x^2-2e^x$ et $g(x)=(4-x^2)e^x$.

58 $f(x)=(x^2+3x+1)e^x$ et $g(x)=x^3e^x$.

59 $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$ et $g(x)=\dfrac{x}{e^x}$.

60 $f(x)=\dfrac{e^x}{x+2}$ et $g(x)=\dfrac{x+2}{e^x}$.

61 $f(x)=\dfrac{e^x+1}{e^x}$ et $g(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$.

63 **a.** $(x-2)e^x \geqslant 0$; **b.** $\dfrac{-0{,}5x+3}{e^x} \geqslant 0$.

64 **a.** $(4-x^2)e^x \geqslant 0$; **b.** $\dfrac{1-e^x}{e^x+1} \geqslant 0$.

Tableaux de signes

Dresser le tableau de signes de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.
On ne doit pas calculer la dérivée $f'(x)$.

65 $f(x)=(2x^2+3x-5)e^x$.

66 $f(x)=\dfrac{-x^2+4x-4}{e^x+3}$.

67 $f(x)=(2x+5)(e^x+1)$.

68 $f(x)=(3x-6)(e^x-e)$.

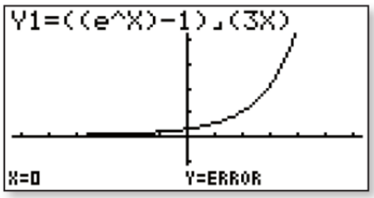
69 $f(x)=(4x^2-3x-1)(e^x-e^2)$.

70 $f(x)=(e^x+3)(e^x-e^2)$.

71 Prolongement par continuité

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ par :

$$f(x)=\frac{e^x-1}{2x}.$$



Sa courbe représentative $\mathscr{C}$ est visualisée à l'écran d'une calculatrice.

a. Expliquer la réponse donnée par la calculatrice pour $x=0$.

b. On cherche une fonction g définie sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \neq 0$, on a $g(x)=f(x)$.
À l'aide de la calculatrice, rechercher quelle valeur donner à $g(0)$ pour que la fonction g soit continue en 0.

c. Étudier le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Étude de variations

Étudier les variations de la fonction f définie sur l'intervalle donné.

72 $f(x)=3e^x+2x$ sur $[0;5]$.

73 $f(x)=3e^x-3x+1$ sur $[-1;3]$.

74 $f(x)=(2x+3)e^{x}$ sur $\mathbb{R}$.

75 $f(x)=(x^2-9x+19)e^{x}$ sur $[0;6]$.

76 $f(x)=\dfrac{-x^2+x+5}{e^x}$ sur $[-2;4]$.

77 $f(x)=\dfrac{2e^x}{1+e^x}$ sur $[0;10]$.

78 $f(x)=\dfrac{x^2+1}{e^x}$ sur $[-4;1]$.

79 Doublement de population

Une population de bactéries est modélisée par : $f(x)=2\times e^{x}$, où x est le temps en heure depuis le début du protocole.

La population est exprimée en millier.

1 **a.** Calculer la population au bout de 6 h, arrondie au millier près.

b. Calculer la population au bout de 2 h 30.

2 **a.** Calculer $f'(x)$, où f' est la dérivée de f.

b. Le rythme de croissance d'une population est sa dérivée. Calculer le rythme de croissance au bout de 2 h 30, en millier par heure. *Arrondir à 5 min près.*

3 **a.** Simplifier $\dfrac{f(x+1)-f(x)}{f(x)}$, taux de variation de la population entre les instants x et $x+1$.

En déduire le taux d'évolution horaire de cette population.

b. Calculer le taux d'évolution pour 10 min, soit un sixième d'heure.

4 À l'aide des fonctionnalités d'une calculatrice, déterminer le temps nécessaire pour que cette population double.

80 Interpréter graphiquement

La fonction f est définie sur $[-5;5]$ par :

$$f(x)=(3-x^2)e^{x}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f.

1 **a.** Montrer que $f'(x)=e^{x}(-x^2-2x+3)$.

b. En déduire le signe de $f'(x)$ sur $[-5;5]$, puis dresser le tableau de variations de f.

c. La courbe $\mathscr{C}$ admet-elle des tangentes horizontales ?

2 **a.** Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

b. Indiquer les coordonnées du point d'intersection entre la tangente T et l'axe des abscisses.

On note ce point I.

3 Tracer T et $\mathscr{C}$, en plaçant le point I sur le graphique.

82 Variations pour connaître le signe

PARTIE A

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x)=e^{x}-x+1.$$

a. Calculer $g'(x)$.

b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^{x}-1\geqslant 0$.

c. Dresser le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$.

Préciser la valeur de $g(0)$ et en déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$.

PARTIE B

On considère maintenant la fonction f définie sur l'intervalle $[-1;+\infty[$ par $f(x)=x+1+\dfrac{x}{e^x}$.

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f.

1 **a.** Montrer que pour tout réel $x\geqslant -1$, on a $f'(x)=\dfrac{g(x)}{e^x}$.

b. En utilisant les résultats de la question **2** de la **Partie A**, préciser le signe de $f'(x)$ et les variations de la fonction f sur $[-1;+\infty[$.

2 Déterminer une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

3 **a.** Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution x_0 dans $[-1;0]$.

b. Justifier que $-0{,}5<x_0<-0{,}4$.

c. En déduire le signe de $f(x)$ sur $[-1;+\infty[$.

4 Tracer la droite T et la courbe $\mathscr{C}$ sur $[-1;4]$.

On placera x_0 sur le graphique.

83 Prix d'équilibre

Une entreprise fabrique et vend des fourchettes, dont le prix unitaire est compris entre 1 et 4 €. On estime que pour un prix unitaire de x euros :

- l'offre $f(x)$, en dizaine de milliers de fourchettes, est : $f(x)=0{,}05\,e^{x}$.
- la demande $g(x)$, en dizaine de milliers de fourchettes, est :

$$g(x)=\frac{5}{e^x}.$$

1 On pose $h(x)=f(x)-g(x)$ sur $[1;4]$.

a. Calculer $h'(x)$. On rappelle que $\left(\dfrac{1}{v}\right)'=-\dfrac{v'}{v^2}$.

b. Étudier le signe de $h'(x)$. En déduire le sens de variation de la fonction h sur $[1;4]$.

2 On a effectué la recherche suivante à l'aide du logiciel *Xcas* :

```
1 resoudre_numerique(e^x=10)
  2.30258509299
```

a. Justifier que l'équation résolue ci-dessus permet d'obtenir le prix d'équilibre x_0.

b. Lire la valeur arrondie de x_0 au centime près.

3 Lorsqu'on se trouve à l'équilibre, quelle est l'offre et la demande ? Utiliser la valeur exacte de e^{x_0}.

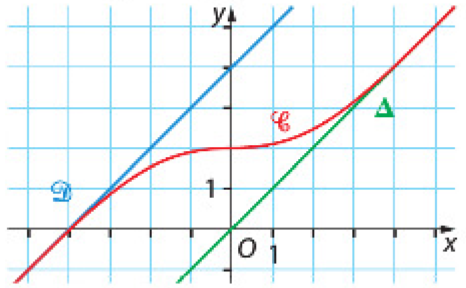
En déduire le chiffre d'affaires engendré par la vente des fourchettes au prix d'équilibre.

84 Justifier des positions relatives

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + \dfrac{4}{1+e^x}$.

On a tracé ci-après la courbe $\mathscr{C}$ représentant la fonction f et les droites Δ et $\mathscr{D}$ d'équations respectives :

$$y = x \quad \text{et} \quad y = x + 4.$$



1 Conjecturer les positions relatives de la courbe $\mathscr{C}$ avec les droites Δ et $\mathscr{D}$.

Aide Pour l'étude des positions relatives de deux courbes, revoir l'AP page 62.

2 **a.** Étudier le signe de $f(x) - x$ sur $\mathbb{R}$.
b. En déduire la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite Δ d'équation $y = x$.

3 **a.** Démontrer que pour tout réel x, on a :

$$f(x) - (x+4) = \frac{-4\,e^x}{1+e^x}.$$

b. En déduire la position relative de $\mathscr{C}$ et de la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x + 4$.

4 **a.** On a obtenu l'expression de la dérivée $f'(x)$ par un logiciel de calcul formel. Justifier l'expression obtenue.
b. En déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
c. Justifier que la courbe $\mathscr{C}$ admet une tangente horizontale.

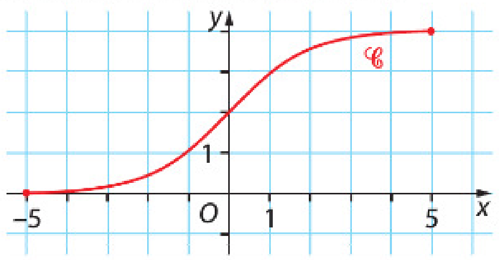
```
1 f(x):=x+4/(1+exp(x))
```
$$x \to x + \frac{4}{1+\exp(x)}$$
```
2 deriver(f(x))
```
$$\frac{(\exp(x)-1)^2}{(\exp(x)+1)^2}$$

85 Recherche d'un point d'inflexion

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[-5\,;5]$ par :

$$f(x) = \frac{4\,e^x}{e^x + 1}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f.



1 Démontrer que, pour tout réel x de $[-5\,;5]$:

$$f'(x) = \frac{4\,e^x}{(e^x+1)^2}.$$

2 Étudier le signe de la dérivée $f'(x)$ sur $[-5\,;5]$.
En déduire le sens de variation de f sur $[-5\,;5]$.

3 **a.** À l'aide du graphique, estimer l'abscisse du point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}$.
b. À l'aide du logiciel *Xcas*, on a obtenu l'expression de la dérivée seconde $f''(x)$ de f.
Sans justifier le résultat obtenu, étudier le signe de la dérivée seconde $f''(x)$ sur l'intervalle $[-5\,;5]$.

```
1 f(x):=4*exp(x)/(exp(x)+1)
```
$$x \to 4\cdot\left(\frac{\exp(x)}{\exp(x)+1}\right)$$
```
2 deriver(deriver(f(x)))
```
$$\frac{-4\cdot\exp(x)\cdot(\exp(x)-1)}{(\exp(x)+1)^3}$$

c. Déterminer par le calcul l'abscisse du point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}$.

86 Points d'inflexion

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x^2+1)\,e^x.$$

1 Visualiser sa courbe représentative $\mathscr{C}$ à l'écran d'une calculatrice dans la fenêtre $[-8\,;2]$.
Conjecturer le nombre de points d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}$. On ne demande pas de valeurs.

2 À l'aide du logiciel TI-Nspire™, on a obtenu l'expression de la dérivée $f'(x)$ et de la dérivée seconde $f''(x)$ de f.

Define $f(x)=(x^2+1)\cdot e^x$	*Terminé*
$\frac{d}{dx}(f(x))$	$(x^2+2\cdot x+1)\cdot e^x$
$\frac{d^2}{dx^2}(f(x))$	$(x^2+4\cdot x+3)\cdot e^x$

a. Justifier $f'(x)$. Étudier son signe.
En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.
b. Sans justifier le résultat obtenu par le logiciel, étudier le signe de $f''(x)$ sur $[-8\,;2]$.
c. Démontrer la conjecture faite à la question **1**.

Calculs de dérivées

Dériver les fonctions. On factorisera au maximum les expressions obtenues.

88 $f(x) = e^{3x} + 2$ et $g(x) = 10\,e^{-0{,}5x}$.

89 $f(x) = x\,e^{-x}$ et $g(x) = e^{-x^2+x}$.

90 $f(x) = (2x-3)\,e^{-0{,}1x}$ et $g(x) = (5 - 0{,}1\,x)\,e^{2x}$.

91 $f(x) = 4\,x\,e^{-x+1}$ et $g(x) = 3\,e^{1-x^2}$.

92 $f(x) = (x^2+1)\,e^{-x}$ et $g(x) = e^{\frac{1-x}{2}}$.

93 $f(x) = \exp\left(\dfrac{x-3}{x-1}\right)$ et $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{\frac{-x^2}{2}}$.

Étude de variations

Étudier les variations de la fonction f définie sur l'intervalle donné.

94 $f(x)=5\,e^{-2x}$ sur $\mathbb{R}$.

95 $f(x)=100\,e^{-0{,}5x+1{,}5}$ sur $\mathbb{R}$.

96 $f(x)=(e-1)\,e^{2x+1}$ sur $\mathbb{R}$.

97 $f(x)=0{,}01\,e^{1{,}2x}+2x$ sur $[0\,;20]$.

98 $f(x)=(4-x)\,e^{x/2}$ sur $[0\,;4]$.

99 $f(x)=\dfrac{10}{1+2\,e^{-0{,}2x}}$ sur $[-2\,;10]$.

100 $f(x)=\dfrac{25}{5+2\,e^{-0{,}5x}}$ sur $[0\,;15]$.

101 $f(x)=\exp\left(\dfrac{x^2}{x-1}\right)$ sur $]-\infty\,;1]$.

102 Réaliser une prévision

Le glacier d'Aletsch, classé à l'UNESCO, est le plus grand glacier des Alpes. Situé dans le sud de la Suisse, il alimente la vallée du Rhône.

Pour étudier le recul de ce glacier au fil des années, une première mesure a été effectuée en 1900 : ce glacier mesurait alors 25,6 km de long.
Des relevés ont ensuite été effectués tous les 20 ans, ce qui permet de modéliser la longueur du glacier $f(t)$, en km, en fonction du nombre t d'années écoulées depuis 1900 par $f(t)=25{,}6-0{,}2\times e^{0{,}025t}$.

1 a. Calculer la dérivée de la fonction f sur $[0\,;+\infty[$.
b. En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$. Interpréter.
2 Estimer, selon le modèle, la longueur du glacier en 2013.
3 À l'aide de la calculatrice, estimer l'année de disparition du glacier. *Arrondir à l'unité près.*
4 Le modèle est-il valable sur $[0\,;+\infty[$? Argumenter.

103 Décote exponentielle

On estime que la cote Argus, en euro, de la voiture de Lydia, mise en circulation au 1er mars 2009 est
$$f(x)=26\,315\times e^{-0{,}15x},$$
où x est le temps écoulé depuis le 1er mars 2009, en année.
$f(x)$ est la valeur de revente de la voiture à l'instant x.

1 Calculer et interpréter $f(0)$.
2 Étudier le sens de variation de f sur $[0\,;20]$. Interpréter.
3 a. Calculer $\dfrac{f(x+1)-f(x)}{f(x)}$.
En déduire le taux de diminution annuelle de la valeur de la voiture, arrondi à un point de pourcentage près.
b. Lydia revend sa voiture au 1er septembre 2013, dans un état impeccable. Calculer la cote Argus de sa voiture, sans décote de kilométrage, arrondie à 100 € près.
Calculer alors le taux de diminution de la valeur de la voiture depuis son achat. *Arrondir à un point de pourcentage près.*
c. Calculer le taux de diminution de la cote sur six mois. *Arrondir à un point de pourcentage près.*

104 Croissance exponentielle

Sur la période 2001-2008, on modélise le nombre de domaines sur Internet en « .fr », exprimé en millier, par la fonction f définie par $f(x)=86{,}6\,e^{0{,}35x}$, où x désigne le nombre d'années écoulées depuis le 1er janvier 2001.
On fait l'hypothèse que le modèle reste valable jusqu'en 2020, c'est-à-dire que la fonction f est définie sur l'intervalle $[0\,;19]$.

1 a. Déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;19]$. Interpréter.
b. Calculer $\dfrac{f(x+1)-f(x)}{f(x)}$.
Interpréter le nombre obtenu en termes de variation relative, puis de taux d'évolution en pourcentage, arrondi à un point de pourcentage près.
2 Calculer $f(8{,}5)$. Interpréter le résultat.
3 a. Montrer que l'équation $f(x)=10\,000$ admet une unique solution x_0 dans $[0\,;19]$.
Donner la valeur arrondie de x_0 à $\dfrac{1}{12}$ près.

Voir Savoir faire page 73

b. En déduire l'ensemble solution, dans $[0\,;19]$, de l'inéquation $f(x)\geqslant 10\,000$.
Exprimer le résultat en fonction de x_0.
c. Selon le modèle, à partir de quelle année et en quel mois le nombre de domaines en « .fr » dépassera-t-il 10 millions ?
4 Montrer que $f(x)$ peut s'écrire sous la forme :
$$f(x)=K\times q^x,\text{ avec K et } q \text{ nombres réels.}$$

105 Factoriser la dérivée

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{2x} + 4\,e^{x} - 6\,x\,.$$

1 Calculer $f'(x)$, puis vérifier que :

$$f'(x) = 2\,(e^{x} - 1)\,(e^{x} + 3)\,.$$

2 Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.

3 Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$, en précisant la valeur du minimum.

106 Déterminer un maximum

Une entreprise peut extraire entre 2 000 et 15 000 tonnes de minerai d'une carrière. Le résultat d'exploitation qu'elle envisage, en million d'euros, est donné par :

$$f(x) = (4x - 13)\,e^{-0{,}2\,x}\,,$$

où x est la quantité de minerai extraite, $x \in [\,2\,;15\,]$.

1 Résoudre l'inéquation $f(x) \leqslant 0$ sur $[\,2\,;15\,]$. Interpréter économiquement le résultat.

2 **a.** Montrer que $f'(x) = (6{,}6 - 0{,}8\,x)\,e^{-0{,}2\,x}$.

b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[\,2\,;\,15\,]$, puis dresser le tableau de variations de f.

3 Pour quelle quantité extraite le résultat d'exploitation est-il maximum ?

107 Offre, demande et prix d'équilibre

Une entreprise fabrique un nouveau modèle d'appareils avec ports USB.

Le coût de fabrication de chaque appareil est de 10 €.

L'entreprise envisage de vendre chaque appareil entre 15 et 40 € l'unité.

Avant la commercialisation, l'entreprise effectue une étude de marché afin de déterminer la quantité demandée et offerte en fonction du prix de vente. On estime que si chaque appareil est vendu au prix unitaire x (en €) :

- le **nombre $f(x)$ d'appareils demandés**, en millier, s'exprime par :

$$f(x) = 200\,e^{-0{,}1x}\,,\ \text{où}\ x \in [\,15\,;40\,]\,;$$

- le **nombre $g(x)$ d'appareils offerts**, en millier, que l'entreprise est capable de produire, s'exprime par :

$$g(x) = 4x - 60\,,\ \text{où}\ x \in [\,15\,;40\,]\,.$$

1 **a.** Si l'entreprise propose l'appareil au prix de 23 €, déterminer la quantité demandée, à 10 près.

b. Calculer $f'(x)$. En déduire le sens de variation de f sur $[\,15\,;40\,]$. Interpréter économiquement.

c. À l'aide de la calculatrice, déterminer dans quel intervalle doit se situer le prix unitaire pour que la quantité demandée soit supérieure ou égale à 9 000 unités. *Arrondir à l'euro près.*

108 Cote maximale d'une œuvre d'art

On considère la fonction f définie sur $[\,0\,;5{,}5\,]$ par :

$$f(x) = 0{,}5\,e^{-0{,}4x^2 + 2x}\,,$$

que l'on note aussi : $f(x) = 0{,}5 \times \exp(-0{,}4x^2 + 2x)$.

1 **a.** Calculer $f'(x)$, où f' est la dérivée de f.

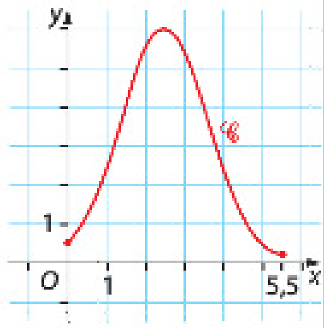
b. Étudier le signe de la dérivée.

c. Étudier les variations de la fonction f.

2 **a.** Justifier que l'équation $f(x) = 3$ admet deux solutions sur $[\,0\,;5{,}5\,]$.

b. À l'aide de la calculatrice, préciser un encadrement de chacune de ces solutions d'amplitude 0,25.

3 Cette fonction f modélise la valeur d'une « œuvre d'art éphémère », en millier d'euros, en fonction du temps x, exprimé en années.



Elle est représentée ci-contre par la courbe $\mathscr{C}$.

a. À quel moment cette œuvre a-t-elle atteint sa valeur maximale et quelle est cette valeur ? *Arrondir à 100 € près.*

b. Graphiquement, déterminer la plage de temps où cette œuvre atteint une valeur supérieure ou égale à 3 000 €.

c. À l'aide de la question **2**, donner un intervalle de temps plus précis.

109 Étude d'une production

Une société extrait du gravier pour la construction d'autoroutes. Elle envisage l'ouverture d'un nouveau site d'extraction. On admet qu'au bout de x centaines de jours d'exploitation, la production journalière sur ce site, en millier de tonnes, est exprimée par :

$$f(x) = (2\,x^2 + 3\,x)\,e^{-x}\,,\ \text{où}\ x \in [\,0\,;6\,]\,.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f ci-après :

1 **a.** Démontrer que, pour tout réel x de $[\,0\,;6\,]$:

$$f'(x) = (-2\,x^2 + x + 3)\,e^{-x}\,.$$

b. Établir le tableau de variations de f sur $[\,0\,;6\,]$.

c. Déterminer au bout de combien de jours après l'ouverture du site, la production journalière sera maximale. Quelle est cette production maximale en millier de tonnes ?

2 **a.** Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 1$ sur $[\,0\,;6\,]$. En utilisant le graphique, encadrer chaque solution entre deux entiers consécutifs.

b. À l'aide de la calculatrice, déterminer au bout de combien de jours, après l'ouverture du site, la production journalière, après avoir atteint son maximum, sera revenue à 1 000 tonnes.

110 Étude de coûts

Une entreprise fabrique et vend entre 10 et 10 000 articles par jour. Le coût moyen de production, en euro par article, d'un article en fonction du nombre x de dizaines d'articles fabriqués est exprimé par :

$$f(x)=\frac{1{,}32\,\mathrm{e}^{0{,}02x}}{x}\text{ , où } x\in[\,1\,;100\,]\,.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1 **a.** Montrer que $f'(x)=\dfrac{1{,}32\,\mathrm{e}^{0{,}02x}(0{,}02x-1)}{x^2}$.

b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[\,1\,;100\,]$.

c. En déduire le tableau de variations de f sur $[\,1\,;100\,]$.

d. Pour quelle production x_0 le coût moyen est-il minimum ?

Quel est alors le montant du coût total de production ?

2 Le coût total est donné par $C(x)=x\times f(x)$.

a. Dans quelle unité s'exprime le coût total ?

b. Étudier le sens de variation du coût total.

c. Vérifier que, lorsque le coût moyen est minimum, le coût marginal $C'(x_0)$ est égal au coût moyen $f(x_0)$.

111 Taux d'équipement

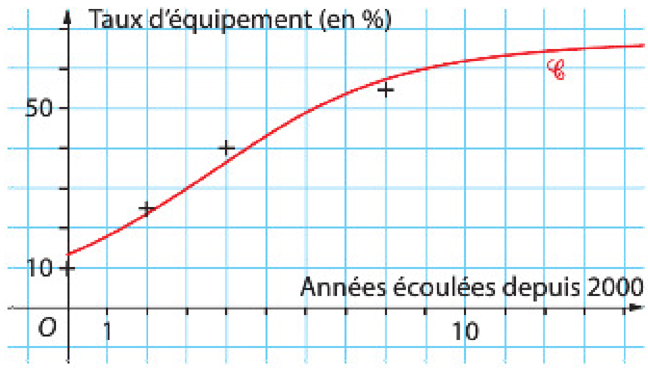
On étudie le taux d'équipement des ménages français en micro-ordinateurs connectés à Internet. Les résultats de cette étude sont donnés dans le tableau ci-dessous :

Année	2000	2002	2004	2008
Taux d'équipement (en %)	10	25	40	55

Source : INSEE.

On modélise alors le taux d'équipement $f(x)$ en micro-ordinateurs connectés à Internet, exprimé en % , en fonction du nombre d'années x écoulées depuis début 2000, par : $\quad f(x)=\dfrac{100}{1{,}5+6\,\mathrm{e}^{-0{,}4x}}$.

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f.



1 Montrer que $f'(x)=\dfrac{240\,\mathrm{e}^{-0{,}4x}}{(1{,}5+6\,\mathrm{e}^{-0{,}4x})^2}$.

2 Déterminer le signe de $f'(x)$ sur $[\,0\,;+\infty\,[$, puis dresser le tableau des variations de f.

Interpréter économiquement le sens de variation de f.

3 **Question ouverte**

Selon le modèle, peut-on estimer que le taux d'équipement des ménages en micro-ordinateurs connectés à Internet atteindra 100 % de la population ?

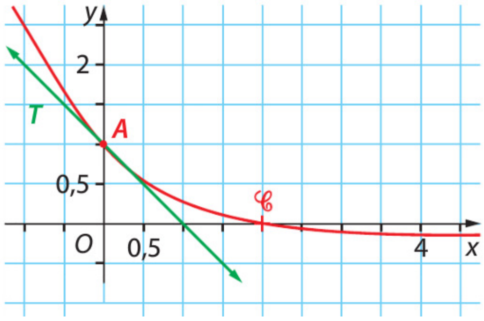
112 Utiliser un graphique

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=(ax+b)\,\mathrm{e}^{-0,5x},$$

où a et b sont des nombres fixés, à déterminer.

La courbe $\mathscr{C}$ représentant la fonction f est tracée ci-dessous dans un repère orthogonal, ainsi que la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point $A(0\,;1)$:



1 **a.** En utilisant le graphique, préciser $f(0)$ et $f'(0)$.

b. On a obtenu $f'(x)$ à l'aide d'un calcul formel :

```
1 f(x):=(a*x+b)*exp(-0.5*x)
      x  ->(a· x+b)· exp((-0.5)· x)
2 deriver(f(x))
   (-exp(-0.5· x))· (0.5· a· x-a+0.5· b)
```

En admettant le résultat obtenu, justifier que les réels a et b vérifient le système : $\begin{cases} b=1 \\ -a+0,5b=1 \end{cases}$.

c. En déduire que $f(x)=(-0,5x+1)\,\mathrm{e}^{-0,5x}$.

2 **a.** Exprimer $f'(x)$, puis étudier le signe de $f'(x)$.
En déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

b. Quel est le minimum de f sur $\mathbb{R}$?
En quelle valeur est-il atteint ?

3 Déterminer par le calcul une équation de la tangente T.

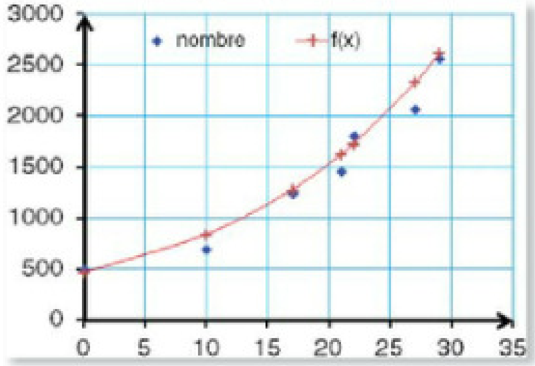
113 Modèle exponentiel sur tableur TICE

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	année	1976	1986	1993	1997	1998	2003	2005
2	x	0	10	17	21	22	27	29
3	$P(x)$	500	700	1250	1453	1800	2066	2568
4	$f(x)$	460	838	1276	1622	1722	2324	2621

Le tableau ci-dessus indique la population de bouquetins des Alpes, $P(x)$, dans le Parc national de la Vanoise depuis 1976, où x est le rang de l'année par rapport à 1976.

À l'aide d'un tableur, on a modélisé le nombre de bouquetins par la fonction f, définie sur $[0\,;100]$ par :

$$f(x)=k\,\mathrm{e}^{0,0583x}.$$



1 **a.** D'après le résultat en B4, donner la valeur de k.

b. Préciser la formule saisie en C4 qui, par recopie vers le bas, donne le nombre de bouquetins suivant ce modèle.

c. D'après le nuage de points obtenus, à quelles dates le modèle « colle-t-il » assez bien aux valeurs observées ?

2 **a.** Étudier le sens de variation de la fonction f.

b. Quelle population de bouquetins peut-on prévoir en 2020, arrondie à 50 près ?

c. Montrer que ce modèle peut s'écrire sous la forme :

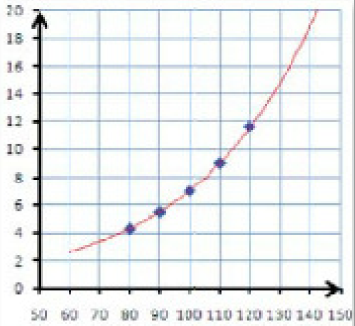
$$f(x)=\mathrm{K}\times q^x,\text{ avec } q \text{ arrondi à } 0,01 \text{ près.}$$

En déduire le taux d'évolution annuel de la population de bouquetins dans le Parc national de la Vanoise.

124 Consommation d'un véhicule

Sur un parcours routier, la consommation aux 100 km d'une voiture est fonction de la vitesse. Pour un type de véhicule, on a relevé la consommation et modélisé à l'aide d'un tableur.

	A	B	C
1	vitesse en km/h	consommation en L/100 km	modèle $f(x)$
2	80	4,3	4,3
3	90	5,5	5,5
4	100	7	7,1
5	110	9	9,1
6	120	11,6	11,6



1 D'après l'allure du nuage de points, est-il adapté de modéliser par :

a. une fonction affine ? Si oui, laquelle ?

b. une fonction polynôme ? Si oui, de quel degré ?

c. une fonction exponentielle de base q ? Si oui, comment interpréter le nombre q ?

2 On modélise la consommation par la fonction f définie sur $[60\,;150]$ par : $f(x)=0{,}6\times 1{,}025^x$, où x est la vitesse en km/h, le modèle n'étant pas valable pour de petites ou de très grandes vitesses.

a. D'après ce modèle, indiquer la formule à écrire en cellule C2 qui, par recopie vers le bas, calcule la consommation aux 100 km.

b. Justifier le sens de variation de la fonction f.

c. Calculer la consommation que l'on peut prévoir pour une vitesse de 60 km/h, puis de 150 km/h.
Dresser le tableau de variations de f sur $[60\,;150]$.

3 **a.** Calculer $\dfrac{f(x+1)-f(x)}{f(x)}$, pour tout $x\in[60\,;150]$.
En donner une interprétation.

b. Si on augmente la vitesse de 10 km, de quel pourcentage augmente-t-on la consommation ?

125 Élasticité de la demande

Un bien de consommation courante est soumis à l'offre et la demande.
La quantité demandée, en unité, est donnée par :

$$f(x)=400\times 0{,}9^x,$$

pour un prix x variant de 4 à 10 €.

1 Préciser le sens de variation de la fonction de demande.

2 **a.** Calculer la quantité demandée pour un prix de 4 €, puis de 5 €.
On donnera les quantités arrondies à l'unité près.

b. Si le prix passe de 4 à 5 euros, calculer la variation relative $\dfrac{f(5)-f(4)}{f(4)}$ de la quantité demandée.

c. Calculer l'**élasticité arc** de la demande lorsque le prix passe de 4 à 5 €.

Définition Si un prix passe de p à $p+\Delta p$, la quantité demandée passe de D à $D+\Delta D$. L'**élasticité arc** de la demande par rapport au prix est le quotient de la variation relative de la demande sur la variation relative du prix. $e_{D/p}=\dfrac{\frac{\Delta D}{D}}{\frac{\Delta p}{p}}$.

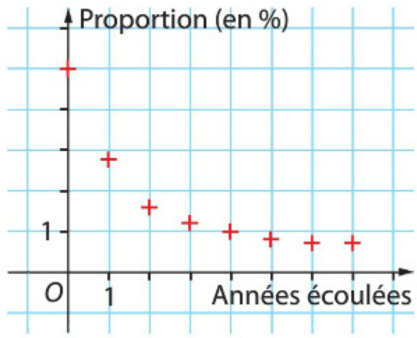
3 Soit x un prix entre 4 et 10 €.

a. Montrer que la variation relative de la demande, lorsque le prix passe de x à $x+1$, est constante.
On simplifiera le quotient $\dfrac{f(x+1)-f(x)}{f(x)}$.

a. En déduire que l'élasticité de la demande par rapport au prix est : $E(x)=-0{,}1\,x$.

129 Étudier les grands excès de vitesse

Pour un conducteur de véhicule, on appelle **grand excès de vitesse** tout dépassement de la vitesse autorisée de plus de 30 km/h.



L'Observatoire national interministériel de la sécurité routière (ONISR) a constaté une nette baisse de la proportion des grands excès de vitesse parmi l'ensemble des excès de vitesse relevés. On modélise la proportion $f(x)$ de grands excès de vitesse, exprimée en pourcentage, par :
$f(x)=4{,}3\times 0{,}5^x+0{,}62$, où x est le temps écoulé, en année, depuis le 1er janvier 2002. On suppose que le modèle reste valable jusqu'en 2020. Ainsi, $x\in[0\,;18]$.

1 Justifier que la fonction f est décroissante sur $[0\,;18]$.

2 Estimer la proportion de grands excès de vitesse en fin 2015.

3 **Question ouverte**
Selon le modèle, peut-on espérer que la proportion de grands excès devienne inférieure à 0,5 % ?

130 Utiliser une fonction auxiliaire

PARTIE A

On considère la fonction g définie sur $[\,0\,;4\,]$ par :

$$g(x)=10+(x-3)\,e^{x}.$$

1 Démontrer que $g'(x)=(x-2)\,e^{x}$ et étudier le signe de $g'(x)$ sur l'intervalle $[\,0\,;4\,]$.

2 Dresser le tableau de variations de la fonction g sur l'intervalle $[\,0\,;4\,]$. On indiquera la valeur de $g(2)$.

3 En déduire le signe de $g(x)$ sur $[\,0\,;4\,]$.

PARTIE B

On considère la fonction f définie sur $[\,0\,;4\,]$ par :

$$f(x)=10x+14+(x-4)\,e^{x}.$$

1 Montrer que pour tout réel x de $[\,0\,;4\,]$, on a :

$$f'(x)=g(x).$$

2 En déduire le sens de variation de f sur $[\,0\,;4\,]$.

PARTIE C Voir AP chapitre 2 page 61

Une fromagerie artisanale fabrique du brie, au maximum 4 tonnes par an.

Le **coût total de fabrication** pour une production de x tonnes est donné par $f(x)$, exprimé en millier d'euros.

Le **coût marginal** pour une production de x tonnes, en millier d'euros par tonne (ou en euro par kg), est assimilé au nombre dérivé $f'(x)$.

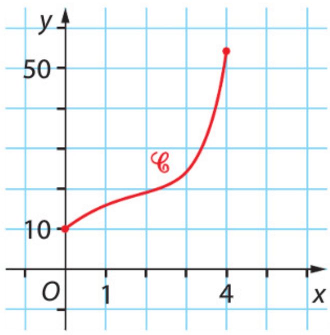
1 Préciser les **coûts fixes** de l'entreprise, c'est-à-dire les coûts lorsque la production est nulle.

2 L'entreprise désire adapter sa production pour atteindre un coût marginal de 11 000 € par tonne.

a. En utilisant la **Partie A**, montrer qu'il existe une unique production de x_0 tonnes qui répond à ce problème.

b. À l'aide de la calculatrice, déterminer la production x_0, à 10 kg près.

3 On donne ci-contre la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f.



a. À l'aide du graphique, estimer l'abscisse du point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}$.

b. Déterminer par le calcul les coordonnées du point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}$. Interpréter économiquement ce point.

131 Étude d'une fonction coût moyen

Une entreprise fabrique des vis, au maximum 6 tonnes par mois.

Le coût moyen de fabrication, en millier d'euros par tonne, d'une production mensuelle de x tonnes, est donné par $C(x)$, où C est la fonction définie sur $]\,0\,;6\,]$ par :

$$C(x)=\frac{0{,}1\,e^{x}+20}{x}.$$

1 À l'aide de la calculatrice :

a. conjecturer en termes de variation, l'évolution du coût moyen de fabrication sur l'intervalle $]\,0\,;6\,]$;

b. estimer le minimum du coût moyen de fabrication et la production mensuelle correspondante ;

c. dire s'il est possible d'atteindre un coût moyen de fabrication de 4 000 euros par tonne. *On précisera la méthode utilisée.*

2 Montrer que, pour tout réel x appartenant à $]\,0\,;6\,]$:

$$C'(x)=\frac{0{,}1\,x\,e^{x}-0{,}1\,e^{x}-20}{x^{2}}.$$

3 On considère la fonction f définie sur $[\,0\,;6\,]$ par :

$$f(x)=0{,}1\,x\,e^{x}-0{,}1\,e^{x}-20.$$

a. Vérifier que pour tout réel x de $[\,0\,;6\,]$:

$$f'(x)=0{,}1\,x\,e^{x}.$$

b. Justifier que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[\,0\,;6\,]$.

c. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une seule solution α dans $[\,0\,;6\,]$.

Donner la valeur de α arrondie au dixième près.

d. En déduire le signe de $f(x)$ sur $[\,0\,;6\,]$.

4 **a.** À l'aide des questions précédentes, justifier que le minimum du coût moyen de fabrication est obtenu pour une production mensuelle de α tonnes de vis.

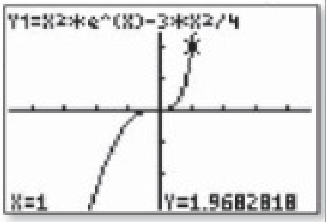
b. Justifier que $C(\alpha)=0{,}1\,e^{\alpha}$.

132 Confirmer ou infirmer une conjecture graphique

On considère la fonction f définie sur $[-3\,;2]$ par :

$$f(x)=x^2e^x-\frac{3}{4}x^2.$$

Le graphique ci-contre est la courbe représentative de cette fonction telle que l'affiche une calculatrice dans un repère orthogonal.



1 En observant cette courbe, quelle conjecture pourrait-on faire pour le sens de variation de f sur $[-3\,;2]$?

Dans la suite du problème, on s'intéresse à la validité de cette conjecture.

2 On a obtenu $f'(x)$ par calcul formel :

$f(x):=x^2\cdot e^x-\frac{3}{4}\cdot x^2$ — Terminé

$\text{factor}\left(\frac{d}{dx}(f(x))\right)$ — $\frac{x\cdot((2\cdot x+4)\cdot e^x-3)}{2}$

Justifier le résultat obtenu.

3 On pose, pour tout réel x de $[-3\,;2]$:

$$g(x)=(2x+4)e^x-3.$$

a. Calculer $g'(x)$ et étudier son signe suivant les valeurs du réel x.

b. En déduire le sens de variation de la fonction g, puis dresser son tableau de variations sur $[-3\,;2]$.

c. Montrer que l'équation $g(x)=0$ possède une unique solution α dans $[-3\,;2]$.

Justifier l'encadrement $-0{,}19 \leqslant \alpha \leqslant -0{,}18$.

d. Déterminer le signe de $g(x)$ sur $[-3\,;2]$.

4 **a.** Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[-3\,;2]$.

b. En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[-3\,;2]$.

c. Que peut-on penser de la conjecture faite à la question **1** ? Quelle fenêtre aurait-il fallu adopter pour visualiser ce résultat ?

133 Modéliser une propagation

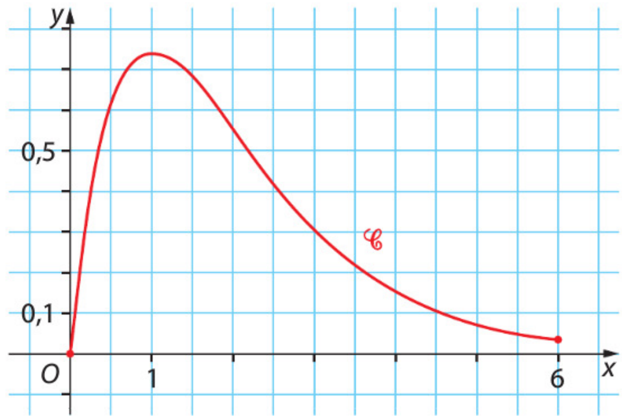
Suite à un accident industriel, un gaz se répand dans un local d'usine. On admet qu'au-delà de six minutes, il n'y a quasiment plus de gaz dans l'air.

On modélise l'évolution du taux de gaz dans l'air grâce à la fonction f définie sur $[0\,;6]$ par : $f(x)=2\,x\,e^{-x}$, où x est le nombre de minutes écoulées depuis l'accident et $f(x)$ le taux de gaz dans l'air exprimé en « partie par million » (ppm).

On donne ci-après la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;6]$.

1 **a.** Calculer $f'(x)$, puis en étudier le signe sur $[0\,;6]$.

b. Donner le tableau complet des variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;6]$.



2 **a.** Montrer que l'équation $f(x)=0{,}65$ admet deux solutions x_1 et x_2 dans $[0\,;6]$. On prendra $x_1<x_2$.

b. À l'aide de la calculatrice, donner la valeur arrondie de x_1 et celle de x_2 à 0,001 minute près.

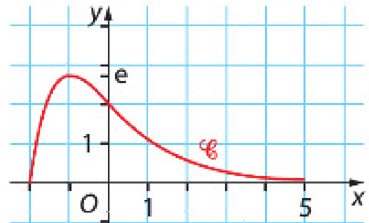
3 On considère que le gaz a un effet irritant pour l'organisme si le taux dépasse 0,65 ppm pendant plus d'une minute. Déterminer si le personnel de l'usine a été affecté ou non par la fuite de gaz, en explicitant la démarche.

134 Positions par rapport à une tangente

Soit la fonction f définie sur $[-2\,;5]$ par :

$$f(x)=(x+2)e^{-x}.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.



PARTIE A Étude de f

1 **a.** Calculer $f'(x)$.

b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[-2\,;5]$.

c. En déduire les variations de f sur $[-2\,;5]$.

2 Montrer que l'équation réduite de la tangente $\mathscr{D}$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 est $y=2-x$.

PARTIE B Étude d'une tangente

Soit la fonction d définie sur $[-2\,;5]$ par :

$$d(x)=f(x)-(2-x).$$

Par calcul formel, on a obtenu les résultats ci-contre, que l'on admet sans les justifier.

```
1  d(x):=(x+2)*exp(-x)-(2-x)
      x -> (x+2)·exp(-x)-(2-x)
2  deriver(d(x))
      -exp(-x)·x-exp(-x)+1
3  deriver(deriver(d(x)))
      x·exp(-x)
```

1 Quel est le calcul fait à la ligne 2 ? à la ligne 3 ?

2 Recopier et compléter le tableau suivant :

x	-2	0	5
Signe de $d''(x)$			
Variation de d'			
Signe de $d'(x)$			
Variation de d			

3 En déduire le signe de $d(x)$ sur $[-2\,;5]$, puis la position de la droite $\mathscr{D}$ par rapport à la courbe $\mathscr{C}$.

4 Que représente le point d'abscisse 0 pour la courbe $\mathscr{C}$?

135 Exponentielle de $u(x)$

On considère la fonction u définie sur $]-\infty\,;2[$ par :

$$u(x)=\frac{x^2-1}{x-2}.$$

Soit $\mathscr{C}_u$ sa représentation graphique.

1 a. Calculer $u'(x)$. Étudier le sens de variation de la fonction u sur l'intervalle $]-\infty\,;2[$.

On donnera la valeur exacte de l'abscisse de l'extremum.

b. Résoudre l'équation $u(x)=0$.

En donner une interprétation graphique.

2 Soit la fonction f définie sur $]-\infty\,;2[$ par :

$$f(x)=\exp(u(x)).$$

a. Calculer $f'(x)$. Étudier le sens de variation de f.

b. Résoudre $f(x)=1$.

136 Étude d'un bénéfice

PARTIE A Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $[0{,}5\,;8]$ par :

$$f(x)=20(x-1)e^{-0{,}5x}.$$

1 Montrer que $f'(x)=10(-x+3)e^{-0{,}5x}$.

2 Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0{,}5\,;8]$ et en déduire le tableau de variations de la fonction f.

3 Construire la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal.

On prendra pour unités graphiques 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

PARTIE B Application économique

Une entreprise produit sur commande entre 50 et 800 bicyclettes par mois pour des municipalités. On estime que si, un mois donné, on produit x centaines de bicyclettes, alors $f(x)$ modélise le bénéfice, exprimé en millier d'euros, réalisé par l'entreprise ce même mois. Dans la suite de l'exercice, on utilise ce modèle.

1 a. Vérifier que si l'entreprise produit 220 bicyclettes un mois donné, alors elle réalise ce mois-là un bénéfice d'environ 7 989 euros.

b. Déterminer le bénéfice réalisé par une production de 480 bicyclettes un mois donné.

2 ***Dans cette question, toute trace de recherche, même non aboutie, sera prise en compte dans l'évaluation.***

a. Pour un mois donné, combien l'entreprise doit-elle produire au minimum de bicyclettes pour ne pas travailler à perte ?

b. Pour un mois donné, combien l'entreprise doit-elle produire de bicyclettes pour réaliser un bénéfice maximum ? *Préciser ce bénéfice à l'euro près.*

c. Pour un mois donné, combien l'entreprise doit-elle produire de bicyclettes pour réaliser un bénéfice supérieur à 8 000 euros ? *Arrondir les bornes à l'entier près.*

137 Offre, demande et prix d'équilibre

PARTIE A Étude d'une fonction

On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle $[4\,;6]$ par :

$$f(x)=100(e^x-45) \quad \text{et} \quad g(x)=10^6\times e^{-x}.$$

1 a. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[4\,;6]$.

b. Étudier le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $[4\,;6]$.

2 Soit la fonction h définie sur $[4\,;6]$ par :

$$h(x)=g(x)-f(x).$$

a. Démontrer que la fonction h est strictement décroissante sur l'intervalle $[4\,;6]$.

b. Dresser le tableau de variations de la fonction h.

c. Montrer que l'équation $h(x)=0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[4\,;6]$.

3 a. Dresser le tableau de valeurs de $h(x)$ sur l'intervalle $[4\,;6]$ par pas de 0,2 en arrondissant à la centaine la plus proche.

b. Construire la courbe représentative $\mathscr{C}_h$ de la fonction h dans le plan muni d'un repère orthogonal.

Unités graphiques : 1 cm pour 0,2 en abscisses ;
1 cm pour 4 000 en ordonnées.

On placera l'axe des ordonnées à la graduation 4.

c. Placer α sur ce graphique et en donner un encadrement d'amplitude 10^{-2}.

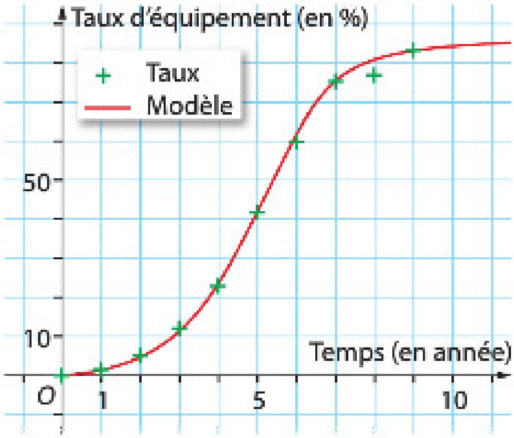
138 Taux d'équipement en lecteur de DVD

Le tableau ci-dessous donne les taux d'équipement des ménages français en lecteur de DVD, de 1998 à 2007 :

Année	1998	1999	2000	2001	2002
Pourcentage	0,2	1,5	4,9	12,0	23,3
Année	2003	2004	2005	2006	2007
Pourcentage	41,65	59,9	75,0	76,9	83,3

Sources : GIK-CNC/DEPS7.

Une modélisation consiste à estimer, pour l'année $1998 + x$, le taux d'équipement en lecteur de DVD, en pourcentage, par : $$f(x) = \frac{85}{1 + 150\,e^{-x}}.$$



1 a. Calculer $f'(x)$ et étudier son signe. En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

b. Estimer le taux d'équipement en lecteur de DVD que l'on peut prévoir en 2010, puis en 2012.

2 Le **rythme de croissance (instantané)** du taux d'équipement est assimilé à la dérivée de f.

a. En utilisant le graphique, estimer en quelle année le rythme de croissance est maximal.

b. Pour la courbe représentative de f, quelle signification donner à cette année ?

3 Question ouverte

Selon ce modèle, peut-on estimer que le taux d'équipement des ménages atteindra 90 % ? Si oui, en quelle année ?

Ce type de modèle est un **modèle logistique**.

139 Coût total, recette et bénéfice

PARTIE A Étude d'une fonction

Soit la fonction f définie sur $[5\,;15]$ par :
$$f(x) = 0{,}2\,x + 1 + e^{-0{,}2x+1}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f.

1 a. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x de $[5\,;15]$.

b. Résoudre dans $[5\,;15]$ l'inéquation : $1 - e^{-0{,}2x+1} \geqslant 0$.

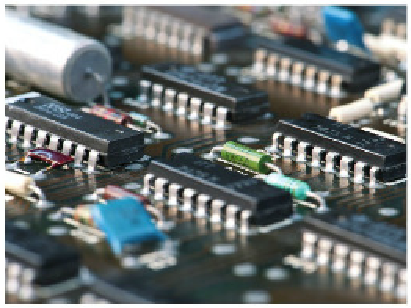
c. En déduire le tableau de signes de $f'(x)$ sur $[5\,;15]$ et le tableau de variations de la fonction f sur ce même intervalle.

2 Représenter la courbe $\mathscr{C}$.

Unités graphiques : 1 cm en abscisses et 2 cm en ordonnées.

PARTIE B Application économique

Une entreprise fabrique du matériel informatique.



Lorsqu'elle fabrique x centaines d'objets d'un certain type, avec $5 \leqslant x \leqslant 15$, le coût total de production, en millier d'euros, est modélisé par $f(x)$, où f est la fonction définie à la Partie A.

1 a. Calculer le coût total de production, en millier d'euros, de 900 objets, puis de 1 000 objets.

Arrondir à l'euro près.

b. Calculer le pourcentage d'augmentation de coût si l'on passe d'une production de 900 objets à une production de 1 000 objets.

2 Chaque centaine d'objets est vendue 0,4 millier d'euros. La recette pour x centaines d'objets vendus est donc donnée par $g(x) = 0{,}4\,x$.

a. Tracer la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = 0{,}4\,x$ sur le graphique précédent.

b. Par lecture graphique, indiquer la production x_0 à partir de laquelle l'entreprise réalise un bénéfice, avec la précision permise par le graphique.

c. À l'aide de la calculatrice, préciser la valeur approchée de x_0 par excès à l'objet près.

140 Bénéfice mensuel maximal

Dans une entreprise, la production et la vente de x centaines de jouets tous identiques génère un bénéfice mensuel, en millier d'euros, que l'on modélise par :

$B(x)=10(x-5)\,e^{u(x)}$,

où $x \in [1\,;15]$

et $u(x)=-0{,}02\,x^2+0{,}2\,x-0{,}5$.

1 Résoudre l'équation $B(x)=0$. Interpréter le résultat.

2 On note B' la dérivée de B et u' la dérivée de u .

a. Calculer $u'(x)$, puis $B'(x)$.

b. Montrer que $B'(x)$ a le même signe sur l'intervalle $[1\,;15]$ que $-0{,}4\,x^2+4\,x$.

c. Étudier le signe de $B'(x)$ et dresser le tableau de variations de la fonction B.

On précisera les valeurs aux bornes arrondies à 0,01 près.

3 Pour quelle quantité de jouets le bénéfice est-il maximum ?

Quel est alors ce bénéfice, arrondi à 10 euros près ?

Calculer alors le bénéfice moyen par jouet.

141 Élasticité instantanée

Sur un marché national, pour un prix de vente entre 3 et 8 € le kg, l'offre de viande d'agneau par les producteurs est donnée par :

$$f(x)=e^{x+1}-45$$

et la demande est donnée par :

$$g(x)=10^4\times e^{-x-1}\,.$$

Les quantités sont en tonne.

1 **a.** Calculer $f'(x)$. Étudier son signe et en déduire le sens de variation de l'offre sur $[3\,;8]$.

Justifier que pour un prix inférieur à 2,8 € le kg, la fonction f ne pouvait pas modéliser l'offre.

2 Calculer $g'(x)$. Étudier son signe et en déduire le sens de variation de la demande.

3 On pose $h(x)=f(x)-g(x)$ sur $[3\,;8]$.

a. En utilisant les dérivées des fonctions f et g , vues aux questions précédentes, préciser le sens de variation de la fonction h sur $[3\,;8]$.

Dresser le tableau des variations de h et calculer les valeurs aux bornes, arrondies à l'unité près.

b. Montrer que l'équation $h(x)=0$ admet une unique solution sur $[3\,;8]$.

c. À l'aide des fonctionnalités de la calculatrice graphique, déterminer à 0,01 € près le prix d'équilibre du kg d'agneau sur ce marché.

En déduire la quantité demandée à ce prix de vente, arrondie à une tonne près.

4 On considère la fonction E , telle que :

$$E(x)=x\,\frac{g'(x)}{g(x)}\,,\ \text{sur } [3\,;8]\,.$$

On admet que cette fonction E définit l'**élasticité instantanée** de la demande par rapport au prix, c'est-à-dire le pourcentage de variation de la demande pour un accroissement de 1 % du prix. L'élasticité n'a pas d'unité.

a. Exprimer $E(x)$ en fonction de x , sous une forme simplifiée.

b. Calculer $E(3{,}83)$. Interpréter le résultat.

142 Coût total, coût marginal et coût moyen

Le coût total d'une production, en millier d'euros, est donné par : $C(x) = 2x + x\,e^{-x+2} + 10$,
où la quantité x, en tonne, est comprise entre 0,5 tonne et 5 tonnes.
On rappelle que pour une production de x tonnes :
- le coût marginal $C_m(x)$ est assimilé au nombre dérivé $C'(x)$, en millier d'euros par tonne ;
- le coût moyen $CM(x)$ est $CM(x) = \dfrac{C(x)}{x}$, exprimé en millier d'euros par tonne.

PARTIE A Coût marginal

1 Montrer que : $C_m(x) = e^{-x+2}(1-x) + 2$,
puis que sa dérivée est donnée par :
$$C_m{}'(x) = (x-2)e^{-x+2}.$$
2 **a.** Étudier le signe de $C_m{}'(x)$ sur $[0,5 ; 5]$.
b. En déduire le tableau de variations de la fonction de coût marginal C_m sur $[0,5 ; 5]$.
3 Préciser le signe de $C_m(x)$ sur $[0,5 ; 5]$, en justifiant.

PARTIE B Point d'inflexion du coût total

On a représenté ci-après la courbe représentative de la fonction de coût total C, ainsi que la tangente $\mathscr{D}$ au point A d'abscisse 2.

1 Justifier que la fonction de coût total C est croissante sur l'intervalle $[0,5 ; 5]$.
2 En remarquant que la dérivée seconde du coût total est la dérivée du coût marginal, c'est-à-dire :
$$C''(x) = C_m{}'(x),$$
justifier que le point A est un point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}$.

PARTIE C Coût moyen

1 Exprimer $CM(x)$ en fonction de x.
2 Démontrer que le coût moyen est décroissant sur l'intervalle $[0,5 ; 5]$.

143 Fonction logistique et coût total

PARTIE A Étude d'une fonction

Soit la fonction f définie sur $[0 ; 20]$ par :
$$f(x) = \frac{80}{1 + 4\,e^{-0,3x}}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f et $\mathscr{D}$ la droite d'équation $y = 7x$.
1 Calculer $f(0)$ et la valeur arrondie au centième près de l'image $f(20)$.
2 Montrer que pour tout réel x de $[0 ; 20]$:
$$f'(x) = \frac{96\,e^{-0,3x}}{(1+4\,e^{-0,3x})^2}.$$
Dresser le tableau de variations de f sur $[0 ; 20]$.
3 Justifier que pour tout réel x de $[0 ; 20]$, on a $f(x) < 80$.
Interpréter graphiquement le résultat.
4 À l'aide d'un calcul formel, on a obtenu une valeur approchée de l'abscisse x_0 du point d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ et la droite $\mathscr{D}$:

```
1 resoudre(80/(1+4*exp(-0.3*x))=7*x,x)
  [9.01687823346]
```

On utilisera ce résultat SANS le justifier.
À l'aide du graphique, indiquer le signe de $7x - f(x)$ selon les valeurs de x, pour $x \in [0 ; 20]$.

PARTIE B Interprétation économique

Une entreprise produit des thermomètres de bain pour bébé, au maximum 2 000 par jour.
On note x le nombre de centaines de thermomètres produits chaque jour travaillé, x appartenant à $[0 ; 20]$.
On suppose que le coût total de production par jour, exprimé en centaine d'euros, est égal à $f(x)$.
1 Déterminer le montant des « coûts fixes », c'est-à-dire le montant des coûts lorsque la quantité produite est nulle.
2 Le coût total de production des thermomètres peut-il dépasser 8 000 € par jour ?
Justifier la réponse.
3 Le prix de vente d'un thermomètre est fixé à 7 €.
La recette journalière, exprimée en centaine d'euros, est donc donnée par $R(x) = 7x$.
Pour quelles productions journalières de thermomètres l'entreprise réalise-t-elle un bénéfice ?

144 Comparer des modèles d'évolution

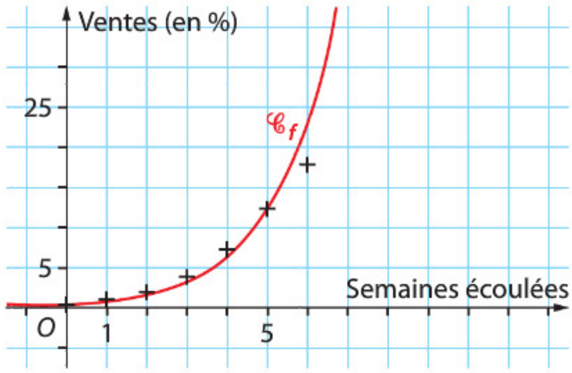
La société « Tournesol » construit et commercialise son « Triphone », nouvel appareil assurant les fonctions d'un ordinateur portable, d'un téléphone portable et d'un agenda électronique.

Les pourcentages des ventes de ce nouvel appareil au sein du segment « haut de gamme » sont donnés, au fil des semaines, dans le tableau ci-après.

Semaines écoulées	0	1	2	3	4	5	6
Ventes (en %)	0,3	1,1	2,2	4,1	7,4	12,5	17,9

PARTIE A Étude d'un modèle exponentiel

Le graphique suggère une croissance exponentielle.



À l'aide d'un tableur, on a obtenu comme ajustement du pourcentage des ventes, en fonction du nombre x de semaines écoulées :

$$f(x) = 0{,}472 \times e^{0{,}655x}.$$

1 Justifier que la fonction f est croissante. Interpréter.

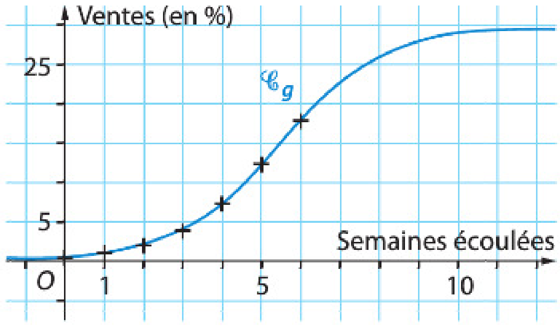
2 a. D'après le graphique, ce modèle est-il pertinent lorsque le nombre de semaines est supérieur à 5 ? Argumenter.

b. Calculer $f(9)$. Que penser du résultat ?

PARTIE B Étude d'un modèle logistique

On décide d'envisager une autre modélisation et, pour cela, on considère la fonction g définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{30}{1 + 60\,e^{-0{,}75x}}.$$



1 a. Montrer que pour tout réel $x \geqslant 0$:

$$g'(x) = \frac{1\,350\,e^{-0{,}75\,x}}{(1 + 60\,e^{-0{,}75\,x})^2}.$$

b. Étudier le signe de $g'(x)$ et en déduire le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

2 À l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur, vers quelle valeur semble tendre $g(x)$ lorsque le réel x devient très grand ? Interpréter.

3 Les objectifs commerciaux du « Triphone » sont considérés comme atteints lorsque le pourcentage des ventes atteint 25 % du segment « haut de gamme ».

À l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur, préciser à partir de quelle semaine les objectifs commerciaux sont atteints.