1 Chacune des affirmations suivantes concerne l'inéquation $x - 3 \geqslant 0$. Lesquelles sont exactes ?

a) 4 est une solution de l'inéquation.

b) 5 est la solution de l'inéquation.

c) Les solutions sont les réels strictement supérieurs à 3.

d) Les réels supérieurs à 4 sont solutions de l'inéquation.

2 Chacune des affirmations suivantes concerne l'inéquation $2x - 1 < 0$. Lesquelles sont exactes ?

a) 0 est une solution de l'inéquation.

b) -1 est la solution de l'inéquation.

c) Les solutions sont les nombres réels strictement inférieurs à $\frac{1}{2}$.

d) Les réels négatifs sont solutions de l'inéquation.

3 Résoudre chaque inéquation.

a) $7x + 4 < -2x + 1$ **b)** $2x - 3 > 6x + 4$

c) $\frac{3}{4}x \leqslant 0$ **d)** $-5x \geqslant \frac{1}{4}$

e) $\frac{x+3}{-2} \geqslant 0$ **f)** $\frac{2x+7}{5} \leqslant \frac{x-9}{4}$

Algorithmique

4 **Algorithme et inéquations**

a) On considère l'inéquation $6x + 7 \geqslant 0$.
Résoudre cette inéquation en suivant pas à pas les instructions de l'algorithme suivant :

- Retrancher 7 dans les deux membres.
- Diviser par 6 les deux membres.
- Écrire l'ensemble des solutions.

b) Écrire un algorithme de résolution de l'inéquation :

$$5x + 3 < -x + 6.$$

5 Combien d'entiers naturels x vérifient :

$$5x + 1\,789 < 12x + 1\,515 < 4x + 2\,009\ ?$$

6 **a)** Résoudre l'inéquation $x + 15 \geqslant \frac{2}{3}(x + 27)$.

b) Un bureau de recherche emploie 27 informaticiens et 15 mathématiciens.
On envisage d'embaucher le même nombre d'informaticiens et de mathématiciens.
Combien faut-il embaucher de spécialistes de chaque sorte pour que le nombre de mathématiciens soit au moins égal aux deux tiers du nombre d'informaticiens ?

7 Pendant la période estivale, un marchand de glaces a remarqué qu'il dépensait 75 € par semaine pour faire, en moyenne, 150 glaces.
Sachant qu'une glace est vendue 2,50 €, combien doit-il vendre de glaces au minimum, dans la semaine, pour avoir un bénéfice supérieur à 76 € ?

8 Voici le tableau de signes d'une expression.

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Pour chaque affirmation, dire si elle est exacte.

a) $f(-7{,}5) < 0$ **b)** $f(\pi) \geqslant 0$

c) -4 et 1 sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$.

d) Les solutions de l'inéquation $f(x) \leqslant 0$ sont les nombres réels de $]-\infty\,;-4]$ ou de $[1\,;+\infty[$.

e) Les nombres tels que $f(x) > 0$ sont les réels x vérifiant $-4 \leqslant x \leqslant 1$.

Pour les exercices 9 à 12, dresser le tableau de signes de chaque expression, puis vérifier la réponse graphiquement avec la calculatrice.

9 **a)** $(3x - 1)(x + 2)$ **b)** $(-5x + 1)(2x + 1)$

10 **a)** $(-3x + 4)(-x - 3)$ **b)** $-x(5 + x)$

11 **a)** $(1 + x^2)(3 - x)$ **b)** $(x + 3)^2(x - 1)$

12 **a)** $x^2(1 - x)(2 - x)$ **b)** $(2x + 1)(x - 3)(5 - 3x)$

13 **a)** Tracer à l'écran de la calculatrice la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto x^2 - x - 2$.

b) Quelles semblent être les solutions de l'équation $f(x) = 0$? Vérifier par le calcul.

c) Conjecturer graphiquement le signe de $f(x)$.

d) Vérifier que pour tout réel x,

$$x^2 - x - 2 = (x + 1)(x - 2).$$

Prouver la conjecture du **c)** à l'aide d'un tableau de signes.

14 **1.** Étudier le signe du produit $(3x - 1)(2x + 5)$.

2. En déduire les solutions de l'inéquation :

a) $(3x - 1)(2x + 5) < 0$ **b)** $(3x - 1)(2x + 5) \geqslant 0$

Conseil : *se reporter à l'exercice résolu 1, page 119.*

15 **1.** Étudier le signe du produit $(-x+4)(3x+2)$.

2. En déduire les solutions de l'inéquation :

a) $(-x+4)(3x+2) > 0$

b) $(-x+4)(3x+2) \leqslant 0$

Pour les exercices 16 à 18, résoudre chaque inéquation. Vérifier à l'aide de la calculatrice.

16 **a)** $(x-4)(3-x) \leqslant 0$ **b)** $(-2x+3)(5+x) > 0$

17 **a)** $3x(3x-5) < 0$ **b)** $-(x+1)^2(2x-1) \geqslant 0$

18 **a)** $-2x(x-1)(4-x) \leqslant 0$ **b)** $x^2(4-x)(-2x+1) > 0$

19 Factoriser le membre de gauche, puis résoudre l'inéquation.

a) $4x^2 - 9 \leqslant 0$

b) $(x+3)^2 - 4 \geqslant 0$

Rappel

Pour tous réels a et b, $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

20 Observer, réfléchir puis résoudre chacune des inéquations.

a) $-5x^2 \leqslant 0$ **b)** $(x-4)^2 \geqslant 0$

c) $(x-1)^2 < 0$ **d)** $x^2 + (x-1)^2 \leqslant -1$

21 On considère les inéquations :

(1) $x^2 \geqslant 4$ **(2)** $x \geqslant 2$

1. a) Le nombre -3 est-il solution de l'inéquation **(1)** ? de l'inéquation **(2)** ?

b) Les inéquations **(1)** et **(2)** ont-elles le même ensemble de solutions ?

2. a) Factoriser $x^2 - 4$.

b) Étudier le signe de $x^2 - 4$.

c) En déduire les solutions de l'inéquation **(1)**.

Pour les exercices 22 à 24, dresser le tableau de signes de chaque expression, puis vérifier la réponse graphiquement avec la calculatrice.

22 **a)** $\dfrac{x+3}{2x-1}$ **b)** $\dfrac{2-x}{5-2x}$ **c)** $\dfrac{3x-1}{-x+5}$

23 **a)** $\dfrac{5x(x-2)}{4x+1}$ **b)** $\dfrac{2x^2}{(-x+1)(x+3)}$

24 **a)** $\dfrac{-x(x-4)}{2+x^2}$ **b)** $\dfrac{(x+1)(x-2)}{3-x}$

25 **a)** Étudier le signe du quotient $\dfrac{9-4x}{11-5x}$.

b) En déduire les solutions de l'inéquation :

$$\frac{9-4x}{11-5x} > 0.$$

26 **a)** Étudier le signe du quotient $\dfrac{-5+4x}{2x-1}$.

b) En déduire les solutions de l'inéquation :

$$\frac{-5+4x}{2x-1} \geqslant 0.$$

Pour les exercices 27 et 28, résoudre chaque inéquation, puis vérifier la réponse graphiquement avec la calculatrice.

27 **a)** $\dfrac{x+1}{3-x} \geqslant 0$ **b)** $\dfrac{7-2x}{2x-1} \leqslant 0$

28 **a)** $\dfrac{-5x}{(2x-7)^2} \geqslant 0$ **b)** $\dfrac{1+2x^2}{7-x} \leqslant 0$

29 On considère les inéquations :

(1) $\dfrac{1}{x} \leqslant 3$ **(2)** $1 \leqslant 3x$

1. a) Le nombre -2 est-il solution de l'inéquation **(1)** ? de l'inéquation **(2)** ?

b) Les inéquations **(1)** et **(2)** ont-elles le même ensemble de solutions ?

2. a) Justifier que l'inéquation **(1)** est équivalente à l'inéquation $\dfrac{1-3x}{x} \leqslant 0$.

b) Étudier le signe du quotient $\dfrac{1-3x}{x}$ et en déduire les solutions de l'inéquation **(1)**.

30 **a)** Tracer à l'écran de la calculatrice la courbe de la fonction $x \mapsto \dfrac{x+4}{5-x}$.

b) Conjecturer graphiquement les solutions de l'inéquation $f(x) < 2$.

c) Vérifier que pour tout réel $x \neq 5$,

$$\frac{x+4}{5-x} - 2 = \frac{3x-6}{5-x}.$$

Prouver la conjecture du **c)** à l'aide d'un tableau de signes.

31 **a)** Tracer à l'écran de la calculatrice la courbe de la fonction $x \mapsto \dfrac{-5}{2x+1}$.

b) Conjecturer graphiquement les solutions de l'inéquation $f(x) \geqslant 1$.

c) Vérifier que pour tout réel $x \neq -\dfrac{1}{2}$,

$$\frac{-5}{2x+1} - 1 = \frac{-2x-6}{2x+1}.$$

Prouver la conjecture du **c)** à l'aide d'un tableau de signes.

34 Résoudre chaque inéquation.

a) $3x(x+3)-(x+3)^2 \leqslant 0$

b) $x^3+2x^2+x \geqslant 0$

35 **1.** Représenter graphiquement à l'écran de la calculatrice les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=x^2-4x \quad \text{et} \quad g(x)=-2x-1.$$

2. Résoudre algébriquement l'équation $f(x)=g(x)$.

3. a) Résoudre graphiquement l'inéquation $g(x) \leqslant f(x)$.

b) Retrouver algébriquement les solutions de l'inéquation précédente.

36 **1. a)** Représenter graphiquement à l'écran de la calculatrice les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=x^2 \quad \text{et} \quad g(x)=2x+1.$$

b) Déterminer à l'aide de la calculatrice des valeurs approchées des abscisses des points d'intersection des deux courbes.

c) Conjecturer les valeurs de x telles que $f(x)<g(x)$.

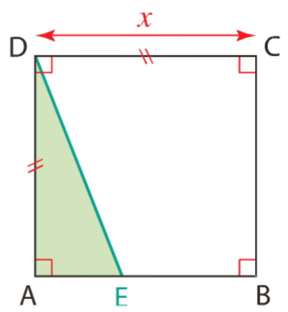
2. a) Vérifier que pour tout réel x,

$$f(x)-g(x)=(x-1-\sqrt{2})(x-1+\sqrt{2}).$$

b) Résoudre algébriquement l'inéquation $f(x)<g(x)$.

37 ABCD est un carré de côté x, exprimé en cm, avec $x>6$. E est le point du segment [AB] tel que :

$$EB = 6 \text{ cm}.$$



a) Exprimer en fonction de x, l'aire en cm^2 du triangle AED.

b) Peut-on trouver x pour que l'aire du carré ABCD soit strictement supérieure au triple de l'aire du triangle AED ?

38 Une entreprise fabrique un produit. Pour une période donnée, le coût total de production, en euros, est donné en fonction du nombre q d'articles fabriqués par :

$$C(q)=2q^2+10q+900 \text{ pour } 0<q<80.$$

Tous les articles fabriqués sont vendus ; la recette totale en euros est donnée par $R(q)=120q$.

a) Vérifier que le bénéfice total est donné par :

$$B(q)=-2(q^2-55q+450),$$

puis que la forme factorisée de $B(q)$ est :

$$B(q)=-2(q-10)(q-45).$$

b) Pour quels nombres d'articles produits la production est-elle rentable ?

39 Pendant une expérience, l'altitude (en mètres) d'un projectile lancé à partir du sol est donnée à l'instant t (en secondes) par la formule :

$$h(t)=-5t^2+100t.$$

(L'origine correspond à $t=0$ s.)

1. À quel instant le projectile retombe-t-il au sol ?

2. À l'aide de la calculatrice, tracer la représentation graphique de la fonction h sur l'intervalle $[0;20]$.

3. Déterminer graphiquement la période pendant laquelle l'altitude du projectile est supérieure ou égale à 320 m.

4. a) Vérifier que :

$$h(t)-320=-5(t-16)(t-4).$$

b) Répondre à la question **3.** par le calcul.

40 **1. a)** À l'aide de la calculatrice, tracer la courbe de la fonction f : $x \mapsto x^2+0{,}02x-0{,}0003$ (fenêtre graphique : $-3 \leqslant X \leqslant 3$ et $-1 \leqslant Y \leqslant 10$).

b) Conjecturer le signe de $f(x)$.

c) Conjecturer à l'aide de la calculatrice le minimum de la fonction f.

d) Les deux résultats sont-ils cohérents ?

2. a) Vérifier que pour tout réel x,

$$f(x)=(x+0{,}01)^2-0{,}0004.$$

b) En déduire que f présente un minimum.

c) Le résultat est-il en accord avec la conjecture de la question **1. c)** ?

3. a) Vérifier que pour tout réel x,

$$f(x)=(x-0{,}01)(x+0{,}03).$$

b) Étudier le signe de $f(x)$.

c) Que penser de la conjecture de la question **1. b)** ?

41 **a)** Résoudre l'inéquation $\dfrac{2x+3}{x-1} \geqslant 4$.

b) Comment vérifier graphiquement ce résultat ?

42 **1. a)** Tracer à l'écran de la calculatrice la courbe $\mathscr{C}$ représentant la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ et la droite Δ d'équation $y=3x+2$.

b) Conjecturer les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}$ et Δ.

c) Conjecturer les valeurs de x pour lesquelles $\mathscr{C}$ est au-dessus de Δ.

2. a) Vérifier que, pour tout réel $x \neq 0$,

$$\frac{1}{x}-(3x+2)=\frac{(1-3x)(x+1)}{x}.$$

b) Étudier le signe de $\dfrac{(1-3x)(x+1)}{x}$.

c) Est-ce en accord avec les conjectures émises aux questions **1. b)** et **1. c)** ?

62 Avec un guide (1)

Marie part de chez elle à 10 h pour se rendre chez une copine. Elle effectue le parcours à vélo à la vitesse moyenne de 24 km·h^{-1}. Elle reste 1 h 20 min chez sa copine puis repart chez elle, à la vitesse moyenne de 20 km·h^{-1}.
Elle rentre avant midi.
Que peut-on dire de la distance entre les deux maisons ?

Guide de résolution

• Noter d la distance, en km, entre les deux maisons, t et t' les durées, en h, des trajets aller et retour.
• Quelle condition impose l'énoncé à $t + t'$?
• En déduire une inéquation d'inconnue d. La résoudre et conclure.

63 Avec un guide (2)

Un cycliste se rend d'une ville A à une ville B. Il effectue la moitié du trajet à la vitesse de 20 km·h^{-1} et l'autre moitié à la vitesse de x km·h^{-1}.

a) Montrer que sa vitesse moyenne $v(x)$ en km·h^{-1} sur l'ensemble du trajet est donnée par :

$$v(x) = \frac{40x}{x+20}.$$

b) Calculer x pour que sa vitesse moyenne $v(x)$ soit égale à 24 km·h^{-1}.

c) Déterminer les valeurs de x pour lesquelles la vitesse moyenne est supérieure ou égale à 15 km·h^{-1}.

d) Montrer que la vitesse moyenne ne peut pas dépasser 40 km·h^{-1}.

Guide de résolution

a) Noter d la distance AB, en km, t et t' les durées, en h, des trajets sur chaque moitié de parcours.
Exprimer alors la vitesse moyenne entre A et B en fonction de d et de x, puis de x uniquement.
d) Étudier le signe de la différence $v(x) - 40$.

64 En économie

Une entreprise fabrique et vend un produit. On note $f(x)$ le coût de production (exprimé en milliers d'euros) de x tonnes de ce produit.
Pour $0 \leqslant x \leqslant 11$, des études ont montré que :

$$f(x) = x^3 - 12x^2 + 50x.$$

1. a) Dresser un tableau de valeurs de la fonction f (donner à x les valeurs entières de 0 à 11).

b) Tracer sur l'intervalle $[0\,;11]$ la courbe représentative de la fonction f à l'écran de la calculatrice, puis sur une feuille (*unités :* 1cm pour 1 tonne en abscisses et 2 cm pour 100 000 euros en ordonnées).

2. L'entreprise vend son produit 30 000 € la tonne ; on note $g(x)$ la recette exprimée en milliers d'euros et $B(x)$ le bénéfice : $B(x) = g(x) - f(x)$.

a) Exprimer $g(x)$ en fonction de x.

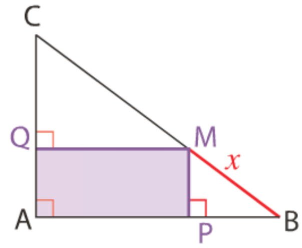
b) Représenter graphiquement la fonction g dans le même repère que la fonction f.

3. a) Déterminer graphiquement les quantités de produit pour lesquelles l'entreprise est bénéficiaire.

b) Développer $(x-2)(x-10)$.

c) Résoudre algébriquement l'inéquation $B(x) > 0$.

65 B2i L 2-4 L 3-5 En géométrie



ABC est un triangle rectangle en A, tel que :

$AB = 8$ et $AC = 6$.

M est un point de l'hypoténuse $[BC]$.
Par M, on trace les perpendiculaires à (AB) et (AC) ; elles coupent $[AB]$ et $[AC]$ respectivement en P et Q.
On se propose d'étudier quelques propriétés du périmètre du rectangle APMQ.

1. À l'aide d'un logiciel de géométrie, conjecturer les réponses aux questions suivantes.

a) Pour quelles positions de M le périmètre est-il supérieur ou égal à 13,5 ?

b) Comparer le périmètre au demi-périmètre du triangle ABC.

2. On pose $BM = x$.

a) Démontrer que $MP = 0{,}6x$ et $MQ = 8 - 0{,}8x$.

b) Exprimer, en fonction de x, le périmètre $p(x)$ du rectangle APMQ.

3. Dans un repère, tracer la courbe représentative de la fonction $x \mapsto p(x)$ sur l'intervalle $[0\,;10]$.

4. Traiter algébriquement et graphiquement les questions **1. a)** et **1. b)**.

66 Fréquence cardiaque

La fréquence cardiaque d'une sportive en fonction de la puissance de l'effort est modélisée par la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;340]$ par :

$$f(x) = 0{,}001\,25x^2 + 0{,}025x + 60,$$

où x est exprimé en watts et $f(x)$ est le nombre de battements du cœur par minute.

1. Déterminer la fréquence cardiaque de cette sportive lorsqu'elle exerce un effort d'une puissance de 200 W.

2. On admet que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\,;340]$.

Pour réviser

56 Résoudre une inéquation produit

Résoudre chacune des inéquations :

a) $(3x - 1)(x + 4) \leqslant 0$

b) $-5x(-2x + 1) < 0$

Conseils

- Pour résoudre une inéquation produit, penser à étudier le signe du produit à l'aide d'un tableau de signes.
- Revoir l'exercice résolu 1, page 119.

57 Résoudre une inéquation quotient

Résoudre chacune des inéquations :

a) $\dfrac{-2x+7}{3-x} > 0$

b) $\dfrac{x+5}{-2x+4} \geqslant 0$

Conseils

- Une inéquation quotient se résout comme une inéquation produit à l'aide d'un tableau de signes.
- Le dénominateur doit être différent de 0 ; penser à la double barre signalant la valeur interdite.
- Revoir l'exercice résolu 2, page 119.

58 Éviter certaines erreurs classiques

Résoudre l'inéquation :

$$x^2 \leqslant 15.$$

Conseils

- Observer la courbe de la fonction carré sur la calculatrice et conjecturer l'ensemble des solutions.
- Factoriser $x^2 - 15$ pour se ramener à une inéquation produit.
- Revoir l'exercice 21, page 121, corrigé en fin de manuel.

59 Éviter certaines erreurs classiques (bis)

Résoudre l'inéquation : $\dfrac{2x-1}{x-3} \geqslant 1$.

Conseils

- Conjecturer les solutions à l'aide de la calculatrice.
- Se ramener à une inéquation quotient, c'est-à-dire à l'étude du signe d'un quotient.
- Revoir l'exercice 30, page 121, corrigé en fin de manuel.

60 Étudier la position de deux courbes

1. a) Tracer à l'écran de la calculatrice la courbe $\mathscr{C}$ représentant la fonction $x \mapsto \dfrac{2x-4}{x-1}$ et la droite Δ d'équation $y = x$.

b) Conjecturer les valeurs de x pour lesquelles $\mathscr{C}$ est au-dessous de Δ.

2. a) Vérifier que, pour tout réel $x \neq 1$:

$$\frac{2x+4}{x-1} - x = \frac{(x+1)(-x+4)}{x-1}.$$

b) Étudier le signe de $\dfrac{(x+1)(-x+4)}{x-1}$.

c) Valider la conjecture émise à la question **1. b)**.

Conseils

- Revoir l'exercice 42, page 123, corrigé en fin de manuel.

2. c) Pour étudier algébriquement la position des courbes représentant deux fonctions f et g, on étudie le signe de la différence $f(x) - g(x)$.

61 Étudier une situation concrète

Une entreprise fabrique un article haut de gamme. Le coût de production mensuel (en euros) en fonction du nombre x d'articles fabriqués est :

$$C(x) = x^3 - 300x^2 + 25\,000x.$$

L'entreprise peut fabriquer au maximum 300 articles par mois ; on suppose qu'elle les vend tous.

1. Le coût mensuel moyen de production d'un article lorsqu'on en produit x (non nul) est : $C_m(x) = \dfrac{C(x)}{x}$.

a) Vérifier que $C_m(x) = (x - 150)^2 + 2\,500$.

b) Démontrer que le minimum de la fonction C_m est 2 500.

Pour quelle production est-il atteint ?

2. Chaque article est vendu 8 900 €.

a) Exprimer le bénéfice mensuel $B(x)$ en fonction du nombre x d'articles fabriqués et vendus.

b) Le bénéfice mensuel moyen sur un article lorsqu'on en produit x (non nul) est $B_m(x) = \dfrac{B(x)}{x}$.

Vérifier que $B_m(x) = 6\,400 - (x - 150)^2$.

En déduire les productions pour lesquelles $B_m(x) \geqslant 0$.

Conseils

2. b). Factoriser l'expression de $B_m(x)$.

- Vérifier la cohérence des résultats à laide de la calculatrice.