Dérivation

1 Dérivées des fonctions usuelles :

Pour savoir dériver, il faut d'abord connaître les dérivées des fonctions de base que vous pouvez retrouver dans le tableau ci-dessous.

Fonction	**Fonction dérivée**	**pour tout x de**	**Exemples**
$f(x) = a$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$	$f(x) = 3 \Rightarrow f'(x) = 0$
$f(x) = ax + b$	$f'(x) = a$	$\mathbb{R}$	$f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$ $f(x) = 2x - 4 \Rightarrow f'(x) = 2$
$f(x) = x^n \ \ (n \in N)$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$	$f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$ $f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$	
$f(x) = \dfrac{1}{x^n} \ \ (n \in N)$	$f'(x) = -\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$	$f(x) = \dfrac{1}{x^2} \Rightarrow f'(x) = -\dfrac{2}{x^3}$ $f(x) = \dfrac{1}{x^3} \Rightarrow f'(x) = -\dfrac{3}{x^4}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$	
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$	
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$	$\mathbb{R}$	

2 Etude forme par forme des opérations sur les fonctions dérivables :

Nous allons voir maintenant comment dériver une somme, un produit, un quotient ...
Il est indispensable de bien comprendre comment fonctionne les formules suivantes pour savoir dériver. Pour finir, nous verrons comment dériver les fonctions les plus diverses en repérant les formules à utiliser.
Vous pourrez ensuite, avec les tests de ce chapitre, apprendre progressivement à utiliser ces formules forme par forme (le meilleur moyen d'apprendre à dériver est de passer à la pratique).

Avertissement : Nous utiliserons par souci de simplification le traditionnel et affreux abus de langage qui consiste par exemple à dire que la dérivée de x^2 est égale à $2x$ (alors que nous devrions dire en fait que la dérivée de la fonction qui à x associe x^2 est la fonction qui à x associe $2x$).
Il ne faut jamais oublier que l'on ne doit pas confondre une **fonction** f avec $f(x)$ (l'image de x par f qui est un **réel**) et que la dérivée f' est elle-même une **fonction** qui à tout x associe $f'(x)$ (le nombre dérivé de f en x, qui est un **réel**).
Toujours par souci de simplification, nous ne nous préciserons pas dans les exemples les intervalles où les fonctions sont dérivables afin de nous concentrer sur l'utilisation des formules.

2-1 Forme $f+g$

Propriété 1
Si f et g sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I alors la fonction $f+g$ est aussi dérivable sur I et $(f+g)'=f'+g'$.

Exemples de fonctionnement de cette formule:

1) La dérivée de la fonction f définie par $f(x)=x^2+x$ est définie par :
$f'(x)=\underbrace{2x}_{\text{dérivée de } x^2}+\underbrace{1}_{\text{dérivée de } x}$

2) La dérivée de la fonction f définie par $f(x)=x^3+4x$ est définie par :
$f'(x)=\underbrace{3x^2}_{\text{dérivée de } x^3}+\underbrace{4}_{\text{dérivée de } 4x}$

3) La dérivée de la fonction f définie par $f(x)=\sqrt{x}+\dfrac{1}{x}$ est définie par :
$f'(x)=\underbrace{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}_{\text{dérivée de } \sqrt{x}}+\underbrace{\dfrac{-1}{x^2}}_{\text{dérivée de } \frac{1}{x}}$

2-2 Forme $k\cdot f$ (k réel)

Propriété 2
Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I et si k est un réel alors la fonction $k\cdot f$ est aussi dérivable sur I et $(k\cdot f)'=k\cdot f'$.

Exemples de fonctionnement de cette formule:

1) La dérivée de la fonction f définie par $f(x)=3\cdot x^2$ est définie par :
$f'(x)=3\cdot\underbrace{2x}_{\text{dérivée de } x^2}=6x$

2) La dérivée de la fonction f définie par $f(x)=-5\cdot x^3$ est définie par :
$f'(x)=-5\cdot\underbrace{3x^2}_{\text{dérivée de } x^3}=-15x^2$

3) La dérivée de la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{2}{x}=2\cdot\dfrac{1}{x}$ est définie par :
$f'(x)=2\cdot\underbrace{\dfrac{-1}{x^2}}_{\text{dérivée de } \frac{1}{x}}=-\dfrac{2}{x^2}$

2-3 Forme $f\cdot g$

Propriété 3
Si f et g sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I alors la fonction $f\cdot g$ est aussi dérivable sur I et $(f\cdot g)'=f'\cdot g+f\cdot g'$.

Exemples de fonctionnement de cette formule:

1) La dérivée de la fonction f définie par $f(x)=x\cdot\sqrt{x}$ est définie par :
$f'(x)=\underbrace{1}_{\text{dérivée de } x}\cdot\sqrt{x}+x\cdot\underbrace{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}_{\text{dérivée de } \sqrt{x}}$

2) La dérivée de la fonction f définie par $f(x)=x^2\cdot\sin x$ est définie par :
$f'(x)=\underbrace{2x}_{\text{dérivée de } x^2}\cdot\sin x+x^2\cdot\underbrace{\cos x}_{\text{dérivée de } \sin x}$

2-4 Forme f^2

Propriété 4
Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I alors la fonction f^2 est aussi dérivable sur I et $\left(f^2\right)' = 2 \cdot f' \cdot f$.

Exemples de fonctionnement de cette formule:

1) La dérivée de la fonction f définie par $f(x) = (3x+1)^2$ est définie par :
$f'(x) = 2 \cdot \underbrace{3}_{\textit{dérivée de } 3x+1} \cdot (3x+1) = 6(3x+1)$

2) La dérivée de la fonction f définie par $f(x) = (\cos x)^2$ est définie par :
$f'(x) = 2 \cdot \underbrace{(-\sin x)}_{\textit{dérivée de } \cos x} \cdot (\cos x) = -2 \cdot \sin x \cdot \cos x$

2-5 Forme $\frac{1}{f}$

Propriété 5
Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I (où $f(x)$ ne s'annule pas) alors la fonction $\dfrac{1}{f}$ est aussi dérivable sur I et $\left(\dfrac{1}{f}\right)' = -\dfrac{f'}{f^2}$.

Exemples de fonctionnement de cette formule:

1) La dérivée de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{5x-1}$ est définie par :

$$f'(x) = -\frac{\overbrace{5}^{\textit{dérivée de } 5x-1}}{(5x-1)^2}$$

2) La dérivée de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x^2+3}$ est définie par :

$$f'(x) = -\frac{\overbrace{2x}^{\textit{dérivée de } x^2+3}}{(x^2+3)^2}$$

3) La dérivée de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$ est définie par :

$$f'(x) = -\frac{\overbrace{\cos x}^{\textit{dérivée de } \sin x}}{(\sin x)^2}$$

2-6 Forme $\frac{f}{g}$

Propriété 6
Si f et g sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I (où $g(x)$ ne s'annule pas) alors la fonction $\dfrac{f}{g}$ est aussi dérivable sur I et $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$.

Exemples de fonctionnement de cette formule:

1) La dérivée de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{7x}{2x+3}$ est définie par :

$$f'(x) = \frac{\overbrace{(7)}^{\textit{dérivée de } 7x} \cdot (2x+3) - (7x) \cdot \overbrace{(2)}^{\textit{dérivée de } 2x+3}}{(2x+3)^2} = \frac{14x+21-14x}{(2x+3)^2} = \frac{21}{(2x+3)^2}$$

2) La dérivée de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^2}{3x+1}$ est définie par :

$$f'(x) = \frac{\overbrace{(2x)}^{\textit{dérivée de } x^2} \cdot (3x+1) - (x^2) \cdot \overbrace{(3)}^{\textit{dérivée de } 3x+1}}{(3x+1)^2} = \frac{6x^2+2x-3x^2}{(3x+1)^2} = \frac{3x^2+2x}{(3x+1)^2}$$

2-7 Forme $f(ax+b)$ (a et b réels)

Propriété 7
Soit f définie sur un intervalle I, a et b deux réels et J un intervalle tel que, pour tout x de J, $ax+b \in I$. Si f est dérivable sur I alors la fonction g définie par $g(x) = f(ax+b)$ est dérivable sur J et $g'(x) = a \cdot f'(ax+b)$.

Exemples de fonctionnement de cette formule:

1) La dérivée de la fonction f définie par $f(x) = (4x+5)^3$ est définie par :
$$f'(x) = \underbrace{4}_{\textit{dérivée de } 4x+5} \cdot \underbrace{3(4x+5)^2}_{\textit{on dérive comme } x^3 \textit{ mais avec } 4x+5} = 12(4x+5)^2$$

2) La dérivée de la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{3x+1}$ est définie par :
$$f'(x) = \underbrace{3}_{\textit{dérivée de } 3x+1} \cdot \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{3x+1}}}_{\textit{on dérive comme } \sqrt{x} \textit{ mais avec } 3x+1} = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}}$$

3) La dérivée de la fonction f définie par $f(x) = \sin(-2x)$ est définie par :
$$f'(x) = \underbrace{-2}_{\textit{dérivée de } -2x} \cdot \underbrace{\cos(-2x)}_{\textit{on dérive comme } \sin x \textit{ mais avec } -2x} = -2\cos(-2x)$$

3 Tableau récapitulatif des opérations sur les fonctions dérivables :

Fonction	**Fonction dérivée**
$f+g$	$f'+g'$
$k \cdot f \quad (k \in \mathbb{R})$	$k \cdot f'$
$f \cdot g$	$f' \cdot g + f \cdot g'$
f^2	$2 \cdot f' \cdot f$
$\frac{1}{f}$	$-\frac{f'}{f^2}$
$\frac{f}{g}$	$\frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$
$x \longmapsto f(ax+b)$ (a et b réels)	$x \longmapsto a \cdot f'(ax+b)$

4 Exemples de dérivation nécessitant l'utilisation de plusieurs formes :

La première chose à faire avant de dériver une fonction est de déterminer sa structure (somme, produit, quotient ...) afin de déterminer quelles sont les formes à utiliser.

Exemples :

1) Dérivée de la fonction f définie par $f(x) = 2x^3 + 5x^2 + 7x - 5$:
La fonction se présente d'abord comme une somme de termes, on utilise donc la forme $f+g$ (de dérivée $f'+g'$) et pour dériver $2x^3$ et $5x^2$ on utilise la forme $k \cdot f$. Ce qui donne :
$$f'(x) = 2 \cdot \underbrace{(3x^2)}_{\textit{dérivée de } x^3} + 5 \cdot \underbrace{(2x)}_{\textit{dérivée de } x^2} + \underbrace{(7)}_{\textit{dérivée de } 7x-5} = 6x^2 + 10x + 7$$

2) Dérivée de la fonction f définie par $f(x) = (8x^2+5) \cdot \sqrt{x}$:
La fonction se présente sous la forme d'un produit, on utilise donc la forme $f \cdot g$ (de dérivée $f' \cdot g + f \cdot g'$). La dérivée de $8x^2$ (forme $k \cdot f$) est égale à $8 \cdot ($ dérivée de $x^2) = 8 \cdot (2x) = 16x$. La dérivée de 5 est elle égale à 0. Donc la dérivée de $8x^2+5$ est égale à $16x$.

D'où le résultat final :

$$f'(x) = \underbrace{16x}_{dérivée\ de\ 8x^2+5} \cdot \sqrt{x} + (8x^2+5) \cdot \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}}_{dérivée\ de\ \sqrt{x}} = 16x\sqrt{x} + \frac{8x^2+5}{2\sqrt{x}}$$

3) Dérivée de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{4-7x^2}$:

La fonction se présente sous la forme d'un inverse, on va donc utiliser la forme $\dfrac{1}{f}$ (de dérivée $-\dfrac{f'}{f^2}$). On aura donc besoin de la dérivée de $4-7x^2$:
La dérivée de $-7x^2$ (forme $k \cdot f$) est égale à $-7 \cdot$ (dérivée de x^2) $= -7 \cdot (2x) = -14x$. La dérivée de 4 étant nulle, la dérivée de $4-7x^2$ sera donc égale à $-14x$.
D'où le résultat final :

$$f'(x) = -\frac{\overbrace{(-14x)}^{dérivée\ de\ 4-7x^2}}{(4-7x^2)^2} = \frac{14x}{(4-7x^2)^2}$$

5 Calcul d'une équation de la tangente à une courbe en un point :

Propriété 8
Si f est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I contenant le réel a, alors une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a est :
$y = f(a) + f'(a)(x-a)$.

Exemples :

1) Soit T la tangente à la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 3x + 1$ au point d'abscisse 2 .
Une équation de T est : $y = f(2) + f'(2)(x-2)$
- on calcule d'abord $f(2)$: $f(2) = 2^2 - 3 \cdot 2 + 1 = 4 - 6 + 1 = -1$.
- on dérive f : $f'(x) = 2x - 3$.
- on en déduit la valeur de $f'(2)$: $f'(2) = 2 \cdot 2 - 3 = 1$.
Une équation de T est donc : $y = -1 + (1)(x-2) \Leftrightarrow y = x - 3$

2) Soit T la tangente à la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+3}$ au point d'abscisse -1 .
Une équation de T est : $y = f(-1) + f'(-1)\,(x-(-1)) \Leftrightarrow y = f(-1) + f'(-1)\,(x+1))$
- on calcule d'abord $f(-1)$: $f(-1) = \dfrac{2(-1)-1}{-1+3} = -\dfrac{3}{2}$.
- on dérive f : $f'(x) = \dfrac{2 \cdot (x+3) - (2x-1) \cdot 1}{(x+3)^2} = \dfrac{2x+6-2x+1}{(x+3)^2} = \dfrac{7}{(x+3)^2}$.
- on en déduit la valeur de $f'(-1)$: $f'(-1) = \dfrac{7}{(-1+3)^2} = \dfrac{7}{4}$.
Une équation de T est donc : $y = -\dfrac{3}{2} + \dfrac{7}{4}(x+1) \Leftrightarrow y = -\dfrac{6}{4} + \dfrac{7}{4}x + \dfrac{7}{4} \Leftrightarrow y = \dfrac{7}{4}x + \dfrac{1}{4}x$