Définition du produit scalaire

10 Dans un repère orthonormé, on donne les points $A(-2\,;1)$, $B(2\,;-1)$ et $C(1\,;-3)$

a) Calculer $\|\overrightarrow{AB}\|$, $\|\overrightarrow{AC}\|$, $\|\overrightarrow{BC}\|$.

b) En déduire que le triangle ABC est rectangle.

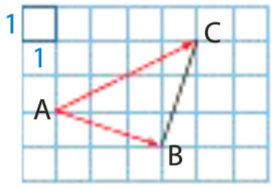
11 Dans un repère orthonormé, on donne les points :

$A(4\,;2)$, $B(-1\,;0)$ et $L(\frac{3}{5}\,;3)$.

Le point L appartient-il à la médiatrice de [AB] ?

13 **a)** Calculer les longueurs AB, AC et BC.

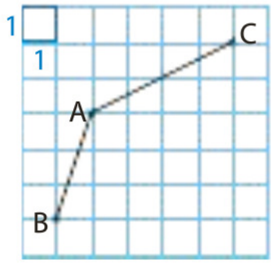
b) En déduire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.



Conseil : se reporter à l'exercice résolu 1 page 209.

14 **a)** Calculer les longueurs AB, AC et BC.

b) En déduire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.



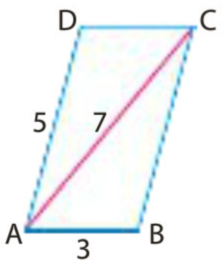
15 ABCD est un parallélogramme tel que $AB = 3$, $AD = 5$ et $AC = 7$.

Calculer les produit scalaires suivants.

a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

b) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}$

c) $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}$



16 On donne un losange ABCD de centre O tel que :

$AB = 5$ et $BD = 6$.

Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$.

17 Rédiger un algorithme qui, en entrée, saisit des longueurs AB, AC, BC d'un triangle et, en sortie, affiche les trois produits scalaires $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$.

18 Dans un repère orthonormé d'origine O, on considère les points $A(1\,;\,0)$, $B\left(1\,;\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $C\left(0\,;\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

On note I le milieu du segment [OA].

a) Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{IC}-\overrightarrow{OB}$.

b) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{IC}$.

c) En déduire que les droites (OB) et (IC) sont perpendiculaires.

Propriétés du produit scalaire

19 **a)** $\vec{u}(2\,;\,3)$, $\vec{v}(-2\,;\,4)$ **b)** $\vec{u}(3\,;\,4)$, $\vec{v}\left(\frac{1}{2}\,;-1\right)$

c) $\vec{u}(1\,;\sqrt{2})$, $\vec{v}(\sqrt{6}\,;-\sqrt{3})$ **d)** $\vec{u}(7\,;\,9)$, $\vec{v}=-\vec{u}$

20 **a)** $\vec{u}(1\,;-4)$, $\quad\vec{v}=\vec{i}+\vec{j}$

b) $\vec{u}=\frac{1}{2}\vec{i}-\vec{j}$, $\quad\vec{v}(4\,;\,0)$

c) $\vec{u}=-4\vec{i}+2\vec{j}$, $\quad\vec{v}=2\vec{i}+8\vec{j}$

d) $\vec{u}=\frac{3}{4}\vec{i}-\frac{1}{2}\vec{j}$, $\quad\vec{v}=2\vec{u}$

21 Dans un repère orthonormé, calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

a) $A(-4\,;2)$, $B(3\,;5)$, $C(-3\,;-9)$

b) $A(1\,;2)$, $B\left(-1\,;\frac{5}{2}\right)$, $C\left(-\frac{3}{2}\,;\,8\right)$

23 Dans un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{i},\,\vec{j})$, on considère les vecteurs $\vec{u}(2\,;\,1)$, $\vec{v}(1\,;\,4)$ et $\vec{w}(4\,;-2)$.

a) Calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$ et $\vec{u}\cdot\vec{w}$. Que remarque-t-on ?

b) Faire une figure et placer les points A, B, et C tels que :

$\overrightarrow{OA}=\vec{u}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{v}$ et $\overrightarrow{OC}=\vec{w}$

c) Déduire de la question **a)**, sans nouveau calcul, que les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont orthogonaux.

24 Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(2\,;3)$, $B(5\,;1)$, $C(1\,;1)$ et $D(-3\,;-5)$.

Les droites (AB) et (CD) sont-elles orthogonales ?

25 Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(2\,;3)$ et $B(-1\,;2)$.

On note $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre [AB].

Parmi les points suivants, quels sont ceux qui appartiennent au cercle $\mathscr{C}$?

$D(0\,;1)$, $E(-3\,;0)$, $F(-2\,;-2)$, $G(0\,;4)$ et $H(-0{,}5\,;3{,}75)$.

26 Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(3\,;5)$, $B(2\,;1)$ et la droite d d'équation $y=x$.

Déterminer les coordonnées du point C appartenant à d tel que $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=0$.

28 Les points A, B, C et D se trouvent sur la droite (OI).

On pose $OI = 1$.
Calculer les produits scalaires suivants.

a) $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{OB}$ **b)** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ **c)** $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD}$
d) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC}$ **e)** $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{OI}$ **f)** $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{DO}$

29 ABC est un triangle équilatéral de côté égal à 1.
On pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.
Calculer les produits scalaires suivants.

a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$ **b)** $\vec{u} \cdot (\vec{u} + \vec{v})$
c) $(2\vec{u} - \vec{v}) \cdot \vec{v}$ **d)** $(2\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - 2\vec{v})$

30 Construire un triangle ABC tel que $AB = 2$, $AC = 1$ et $(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}$ rad. On pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.
Calculer les produits scalaires suivants.

a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$ **b)** $\vec{u} \cdot (\vec{u} + \vec{v})$
c) $(2\vec{u} - \vec{v}) \cdot \vec{v}$ **d)** $(2\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - 2\vec{v})$

31 Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$, on donne les points $A(2\,;3)$, $B(-1\,;2)$ et $C(-2\,;-1)$.
Calculer de deux manières différentes chacun des produits scalaires suivants.

a) $\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ **b)** $\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})$
c) $\overrightarrow{AB} \cdot (2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})$ **d)** $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})$

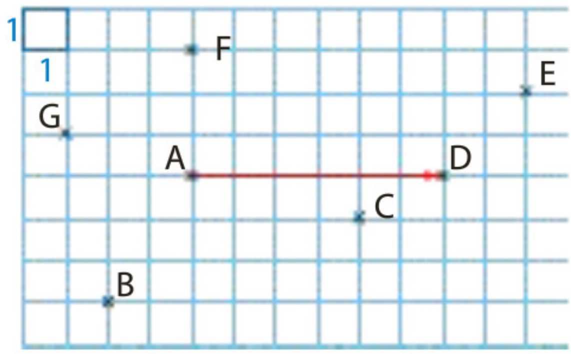
32 $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs tels que :

$$\|\vec{u}\| = 3,\ \|\vec{v}\| = 2 \text{ et } \vec{u} \cdot \vec{v} = 5$$

Calculer :

a) $(\vec{u} + \vec{v})^2$ **b)** $(\vec{u} - \vec{v})^2$ **c)** $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})$

35

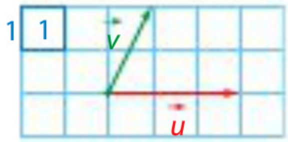


Calculer les produits scalaires suivants.

a) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE}$ **b)** $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}$ **c)** $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AG}$
d) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DC}$ **e)** $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{FE}$ **f)** $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AF}$

36 Calculer le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ dans chacun des cas suivants.

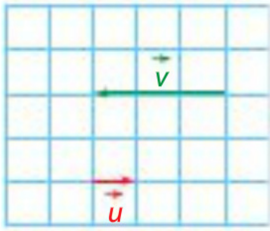
a)



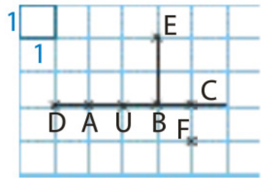
b)

c)

d)



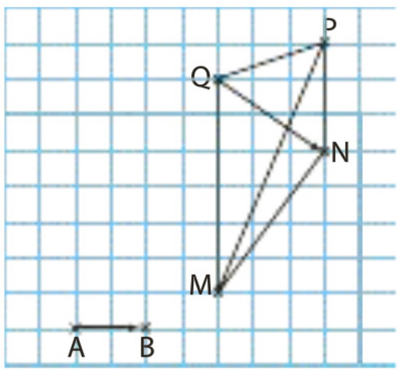
37



Dire pour chaque affirmation si elle est vraie ou fausse. Justifier.

a) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = -2$
b) $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{UB} = 2$
c) $\overrightarrow{BU} \cdot \overrightarrow{EF} = -1$
d) $\overrightarrow{DU} \cdot \overrightarrow{EF} = 0$

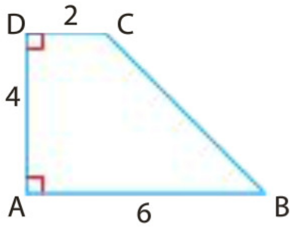
38 MNPQ est un trapèze et la droite (AB) est perpendiculaire à (MQ).
Démontrer que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{QN}$.



39 ABC est un triangle équilatéral de côté 3. G est son centre de gravité. Calculer les produits scalaires :

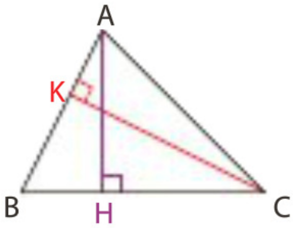
a) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ **b)** $\overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{BC}$ **c)** $\overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GA}$

40 ABCD est un trapèze rectangle. Calculer les produits scalaires suivants.



a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC}$ **b)** $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{DA}$
c) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}$ **d)** $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CB}$
e) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BA}$

41 ABC est le triangle ci-contre. H est le pied de la hauteur issue de A.



$HA = 4$, $HB = 2$ et $HC = 4$.

a) Calculer $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.

b) K est le pied de la hauteur issue de C. Calculer la longueur BK.

42 $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs, on note :

$$(\vec{u}\,;\vec{v}) = \alpha \text{ rad}$$

Illustrer chacun des cas suivants par une figure et calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

a) $\|\vec{u}\| = 3, \|\vec{v}\| = 2, \alpha = \frac{\pi}{4}$

b) $\|\vec{u}\| = 5, \|\vec{v}\| = \frac{3}{2}, \alpha = \frac{\pi}{6}$

c) $\|\vec{u}\| = 2, \|\vec{v}\| = 1, \alpha = \pi$

d) $\|\vec{u}\| = \frac{5}{2}, \|\vec{v}\| = \frac{7}{2}, \alpha = \frac{2\pi}{3}$

43 $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs, on note :

$$(\vec{u}\,;\vec{v}) = \alpha \text{ rad}$$

Calculer $\|\vec{v}\|$ dans chacun des cas suivants.

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = -2, \|\vec{u}\| = 1, \alpha = \frac{3\pi}{4}$

b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3, \|\vec{u}\| = 6, \alpha = \frac{\pi}{3}$

c) $\vec{u} \cdot \vec{v} = -6, \|\vec{u}\| = 4, \alpha = \frac{5\pi}{6}$

44 On considère trois points A, B, C tels que $AB = 4$, $AC = 3$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -6$.

Dire pour chaque affirmation si elle est vraie ou fausse. Justifier.

a) A, B, C sont alignés **b)** $\widehat{BAC} = 30°$ **c)** $BC^2 = 13$

45 $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs, on note :

$$(\vec{u}\,;\vec{v}) = \alpha \text{ rad}$$

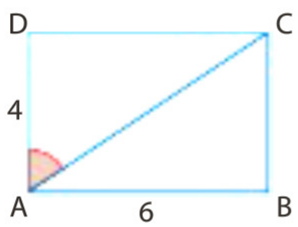
Calculer α dans chacun des cas suivants.

a) $\|\vec{u}\| = 2, \|\vec{v}\| = 8, \vec{u} \cdot \vec{v} = 8\sqrt{2}, \alpha \in [0\,;\pi]$

b) $\|\vec{u}\| = 2\sqrt{3}, \|\vec{v}\| = 6, \vec{u} \cdot \vec{v} = -18, \alpha \in [0\,;\pi]$

c) $\|\vec{u}\| = \sqrt{2}, \|\vec{v}\| = 4, \vec{u} \cdot \vec{v} = -4, \alpha \in [-\pi\,;0]$

46 ABCD est rectangle tel que $AB = 6$ et $AD = 4$.



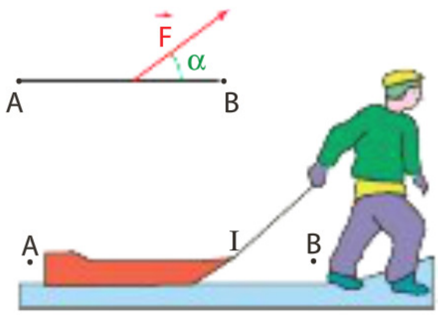
a) Calculer $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$.

b) En déduire la valeur approchée par défaut au dixième de degré près, de la mesure de l'angle $\widehat{CAD}$.

47 Dans un repère orthonormé, on considère les points $A\left(\frac{3}{2}\,;\frac{3}{2}\right)$, $B(0\,;1)$, et $C(2\,;0)$

Calculer la mesure de l'angle $\widehat{ACB}$ en radians.

48 Un enfant tire une luge sur un sol horizontal par l'intermédiaire d'une corde formant un angle $\alpha = 45°$ avec le sol. Il exerce ainsi sur la luge une force $\vec{F}$ constante et il parcourt la distance AB. On pose $\|\vec{F}\| = 100$ N et $AB = 10$ m.



Calculer $\vec{F} \cdot \overrightarrow{AB}$.

49 Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(-4\,;1)$, $B(-1\,;2)$, et $C(1\,;-4)$.

a) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.

Que peut-on en déduire pour le triangle ABC ?

b) Déterminer la valeur approchée par défaut au degré près de la mesure de chacun des angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{BCA}$.

50 Dans un repère orthonormé, on considère les points $A\,(-4\,;1)$, $B\,(-1\,;2)$ et $C\,(1\,;-4)$.

1. Utiliser les deux méthodes suivantes pour démontrer que le triangle ABC est rectangle en B :

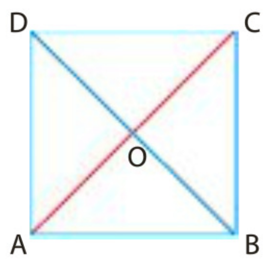
a) en calculant $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.

a) en utilisant le théorème de Pythagore.

2. Donner une valeur approchée au degré près de la mesure de chacun des angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{ACB}$.

52 ABCD est un carré de centre O et de côté égal à 4.

Calculer, en variant les méthodes, les produits scalaires :



a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ **b)** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB}$

c) $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{AB}$ **d)** $\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{CB}$

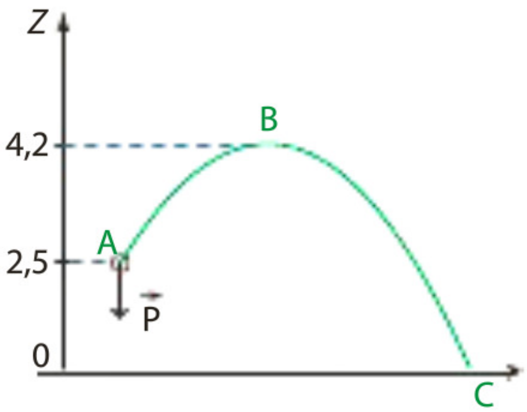
e) $\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OB}$ **f)** $\overrightarrow{CO} \cdot \overrightarrow{DO}$

53 Une balle de masse $m = 200$ g est lancée depuis le point A situé à une altitude de 2,5 m. La trajectoire de son centre d'inertie est représentée ci-dessous.

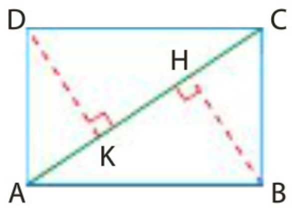
a) Le point B est situé au sommet de la trajectoire à l'altitude 4,20 m. Calculer $\vec{P} \cdot \overrightarrow{AB}$ (travail du poids lors du déplacement de A jusqu'en B).

b) Le point C est au niveau du sol. Calculer $\vec{P} \cdot \overrightarrow{BC}$ (travail du poids lors du déplacement de B jusqu'en C).

On prendra $g = 9{,}81$ N.kg^{-1}.



60 ABCD est un rectangle tel que AD = 3 et AB = 5.
H et K sont les projetés orthogonaux respectifs des points B et D sur la diagonale (AC).



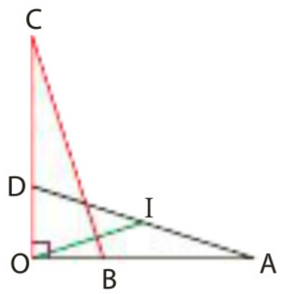
1. a) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB}$.

b) En déduire la longueur HK.

2. Peut-on trouver un rectangle tel que $HK = \frac{1}{2}AC$?

79 Avec un guide (1)

OBC est un triangle rectangle en O et A est le point de la demi-droite [OB) tel que OA = OC.
D est le point de la demi-droite [OC) tel que OD = OB.
I est le milieu du segment [AD].
Démontrer que (OI) est une hauteur du triangle OBC.



80 Avec un guide (2)

ABC est un triangle.

a) Démontrer que pour tout point M du plan,
$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

b) En déduire que les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes.

81 Droite d'Euler d'un triangle

ABC est un triangle et O est le centre du cercle circonscrit à ce triangle.

1. On note H le point du plan tel que :
$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

a) Démontrer que $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.

b) En déduire que H est l'orthocentre du triangle ABC.

2. On note G le point du plan tel que :
$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

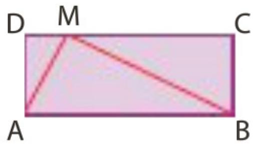
a) Démontrer que G est le centre de gravité du triangle ABC.

b) Démontrer que les points O, H et G sont alignés.

c) Avec un logiciel de géométrie, construire une figure pour illustrer cette propriété.

82 Démontrer de façons différentes

ABCD est un rectangle tel que :
$$AB = 5 \text{ et } AD = 2$$
M est le point du segment [CD] tel que CM = 4.



On se propose de démontrer à l'aide de trois méthodes que le triangle ABM est rectangle.

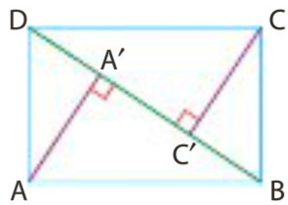
a) Avec le théorème de Pythagore.

b) Avec la géométrie analytique dans le repère orthonormé $(A\,;\,\vec{i},\vec{j})$ où $\vec{i} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$ et $\vec{j} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

c) En développant et simplifiant :
$$(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DA}) \cdot (\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CB})$$

86 Calcul d'une distance

ABCD est un rectangle de dimensions L et ℓ ($L > \ell$).
A′ et C′ sont les projetés orthogonaux des points A et C sur la droite (BD).



a) Calculer le produit scalaire $(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC})$.

b) Justifier que $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = A'C' \times DB$.

c) Déduire des questions précédentes que :
$$A'C' = \frac{L^2 - \ell^2}{\sqrt{L^2 + \ell^2}}$$

87 Deux carrés emboîtés

ABCD est un carré et x un nombre réel.
On note M, N, P et Q les points définis par :
$$\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{BN} = x\overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{CP} = x\overrightarrow{CD} \text{ et } \overrightarrow{DQ} = x\overrightarrow{DA}$$

a) Démontrer que :
$$\overrightarrow{MP} = (1 - 2x)\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \text{ et } \overrightarrow{NQ} = (1 - 2x)\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$$

b) En déduire que $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{NQ} = 0$.

c) Démontrer que MNPQ est un carré.