PROBABILITES CONDITIONNELLES

I) Probabilités conditionnelles

Définition : Etant donné deux événements A et B tels que p(A) ≠ 0, on appelle probabilité conditionnelle de B sachant A (sachant que A est réalisé) et on note p(B/A), le nombre réel défini par : $p(B/A)=\dfrac{p(A\cap B)}{p(A)}$ (formule ❶).

Conséquence : A ∩ B étant un sous ensemble de A, on a : $0\leq p(A\cap B)\leq p(A)$, d'où en divisant par p(A),

$$0\leq p(B/A)=\frac{p(A\cap B)}{p(A)}\leq 1.$$

II) Formules de l'intersection

Propriété : Etant donné deux événements A et B tels que p(A) ≠ 0 et p(B) ≠ 0, on a les deux égalités suivantes :

$$p(A\cap B)=p(A)\times p(B/A)\ ;\ p(A\cap B)=p(B)\times p(A/B)$$ (formules ❷).

Remarques :
- Ces deux résultats découlent immédiatement de la définition du I).
- Il s'agit en fait dans les exercices de « jongler » avec les formules :
  - ① l'énoncé donne p(A ∩ B) et p(A), je peux calculer p(B/A) avec la formule ❶ ;
  - ② l'énoncé donne p(A/B) et p(B), je peux calculer p(A∩B) avec l'une des formules ❷.

III) Evénements indépendants

Définition : Soit A et B deux événements de probabilité non nulle. On dit que A et B sont indépendants si :

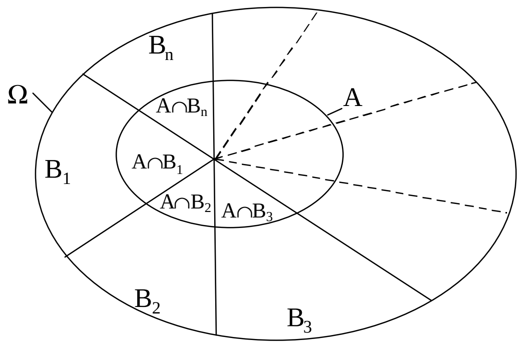
$$p(A)=p(A/B) \text{ ou } p(B)=p(B/A) \text{ ou } p(A\cap B)=p(A)\times p(B).$$

Méthode : pour répondre à la question « les événements A et B sont-ils indépendants ?», il faut, par calcul, vérifier si l'on a, oui ou non, l'une des trois égalités précédentes.

Attention : ① Deux événements A et B indépendants ne sont pas incompatibles : en effet si $p(A\cap B)=p(A)\times p(B)$, alors $p(A\cap B)\neq 0$, ce qui signifie que $A\cap B\neq\varnothing$, c'est-à-dire A et B ne sont pas incompatibles.
② Deux événements A et B incompatibles ne sont pas indépendants : en effet si $p(A\cap B)=0$, alors $p(A\cap B)$ qui est nul, ne peut être égal à $p(A)\times p(B)$ qui est différent de 0, donc A et B ne sont pas indépendants.

IV) Formule des probabilités totales

Propriété : On décompose l'univers Ω en sous-ensembles B_1, B_2, ... B_n disjoints deux à deux et tels que $B_1\cup B_2\cup...\cup B_n=\Omega$ (on dit que les B_1, B_2, ... B_n forment une partition de Ω).



Tout événement A de Ω est alors la réunion des événements disjoints $(A\cap B_1)$, $(A\cap B_2)$, ... $(A\cap B_n)$ et on a :

$$p(A)=p(A\cap B_1)+p(A\cap B_2)+\cdots+p(A\cap B_n)$$

Remarques : • B et $\overline{B}$ forment une partition de Ω ; on a donc dans ce cas, $\underline{p(A) = p(A \cap B) + p(A \cap \overline{B})}$;

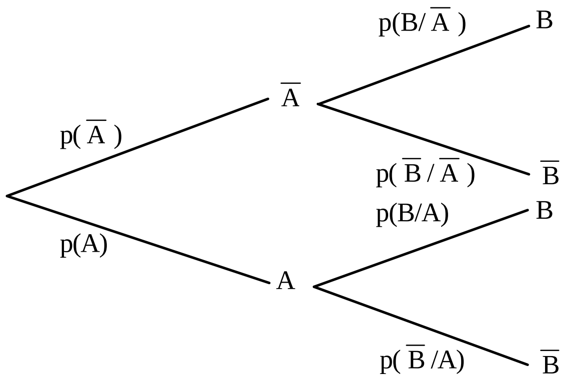
• en divisant par p(A) le résultat précédent, on obtient $1 = p(B/A) + p(\overline{B}/A)$, c'est-à-dire $\underline{p(\overline{B}/A) = 1 - p(B/A)}$.

• Il n'y a pas de formule générale simple liant $p(B/A)$ et $p(B/\overline{A})$.

V) Utilisation des arbres pondérés

1) On décompose l'univers Ω en deux partitions $\{A, \overline{A}\}$ et $\{B, \overline{B}\}$

Exemple : Choix d'une pièce dans un stock de pièces, produit par 2 machines (A et $\overline{A}$), et pouvant présenter des défauts (B) ou non ($\overline{B}$).



$p(\overline{A} \cap B) = p(\overline{A}) \times p(B/\overline{A})$

$p(\overline{A} \cap \overline{B}) = p(\overline{A}) \times p(\overline{B}/\overline{A})$

$p(A \cap B) = p(A) \times p(B/A)$

$p(A \cap \overline{B}) = p(A) \times p(\overline{B}/A)$

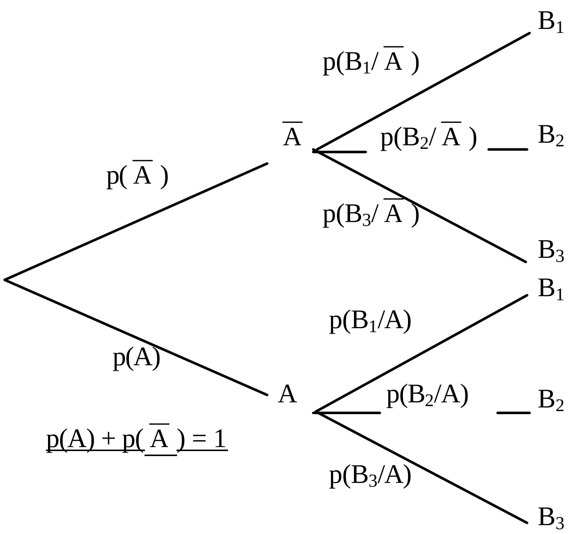
$\underline{p(A) + p(\overline{A}) = 1}$

$\underline{p(B/A) + p(\overline{B}/A) = 1}$

$p(A \cap B) + p(A \cap \overline{B}) = p(A) \times [\ p(B/A) + p(\overline{B}/A)\ ]$
$= p(A)$

2) On décompose l'univers Ω en deux partitions $\{A, \overline{A}\}$ et $\{B_1, B_2, B_3\}$.

Exemple : choix d'une personne au hasard dans une population répartie selon le sexe : homme (A), femme ($\overline{A}$) et selon l'âge : moins de 30 ans (B_1), de 30 ans à 40 ans (B_2), plus de 40 ans (B_3).



$p(\overline{A} \cap B_1) = p(\overline{A}) \times p(B_1/\overline{A})$

$p(\overline{A} \cap B_2) = p(\overline{A}) \times p(B_2/\overline{A})$

$p(\overline{A} \cap B_3) = p(\overline{A}) \times p(B_3/\overline{A})$

$p(A \cap B_1) = p(A) \times p(B_1/A)$

$p(A \cap B_2) = p(A) \times p(B_2/A)$

$\underline{p(A) + p(\overline{A}) = 1}$

$p(A \cap B_3) = p(A) \times p(B_3/A)$

$\underline{p(B_1/A) + p(B_2/A) + p(B_3/A) = 1}$

$p(A \cap B_1) + p(A \cap B_2) + p(A \cap B_3)$
$= p(A) \times [\ p(B_1/A) + p(B_2/A) + p(B_3/A)\ ] = p(A)$

(Formule des probabilités totales)