VARIABLES ALEATOIRES

I) Notion de variable aléatoire

1) Exemple :On lance trois fois de suite une pièce de monnaie équilibrée. On gagne 2 F pour chaque résultat "pile" et on perd 1 F pour chaque "face".
L'univers des possibles est Ω= {PPP, PPF, PFP, FPP, PFF, FPF, FFP, FFF}.
L'ensemble des gains possibles est donc {+6, +3, 0, –3}.

Le tableau ci-contre permet de définir la **loi de probabilité** associée au gain X prenant ses valeurs dans l'ensemble {+6, +3, 0, –3}.

gain X	$x_1 = +6$	$x_2 = +3$	$x_3 = 0$	$x_4 = -3$
probabilité	$p_1 = \frac{1}{8}$	$p_2 = \frac{3}{8}$	$p_3 = \frac{3}{8}$	$p_4 = \frac{1}{8}$

2) Définitions

Définition : Une **variable aléatoire X** définie sur l'univers Ω est une fonction qui, à chaque événement élémentaire ω_i de Ω, fait correspondre un nombre réel x_i.

Remarques et notations :

- Les expériences aléatoires étudiées en lycée ont toujours un univers contenant un nombre fini d'éléments. Par conséquent, la variable aléatoire X prendra toujours un nombre fini de valeurs notées $x_1, x_2, x_3,..., x_n$ dans la suite du cours.
- L'événement « la variable aléatoire X prend la valeur x_i » est noté $(X = x_i)$ et est appelé événement élémentaire associé à la variable aléatoire X.

Définition : Déterminer la **loi de probabilité de la variable aléatoire X**, c'est associer à chaque valeur x_i prise par X la probabilité p_i de son événement élémentaire $(X = x_i)$.

Remarques :

- La loi de probabilité est souvent donnée sous forme de tableau (Voir ci-contre).

x_i	x_1	x_2	...	x_n
$p(X = x_i)$	p_1	p_2	...	p_n

- On a : $\sum_{i=1}^{n} p(X = x_i) = 1$ (A vérifier en pratique dans les exercices).
- Ce tableau est semblable à celui d'une série statistique à une variable où les fréquences sont remplacées par les probabilités.
- Dans les exercices, il faut en fait savoir :
  ① déterminer les valeurs $x_1, x_2, x_3,..., x_n$ que prend X;
  ② déterminer les événements élémentaires $(X = x_i)$ et leurs probabilités p_i.

II) Définitions des caractéristiques d'une variable aléatoire

1) Espérance mathématique : L'espérance mathématique de X est le réel, noté E(X), défini par :

$$E(X) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \ .$$

Remarques :

- Ce nombre représente une moyenne.
- Dans notre exemple de départ, on a : $E(X) = \frac{6}{8} + \frac{9}{8} + 0 - \frac{3}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$.

2) Variance et écart type : La variance de X, notée V(X), et l'écart type de X, noté σ(X), sont définis par :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i \times (x_i - E(X))^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(p_i x_i^2\right) - (E(X))^2 \ \text{ et } \ \sigma(X) = \sqrt{V(X)} \ .$$

3) Remarque : dans les exercices, deux cas se présentent :

- on ne demande que E(X) : le calcul se fait en sommant les produits $p_i x_i$;
- on demande E(X) et σ(X) : on a intérêt à utiliser sa calculatrice en mode statistique à une variable (SD...).

III) Fonction de répartition

La fonction de répartition F de la variable aléatoire X est la fonction numérique qui, à tout réel x, associe la probabilité que X soit inférieur ou égal à x. On a : pour tout réel x, $F(x) = p(X \le x)$.