Exercices supplémentaires – Géométrie plane

Partie A : Coordonnées de vecteurs, colinéarité

Exercice 1

Dans un repère, on considère $A(-6;-1)$, $B(3;1)$, $C(15;4)$ et $D\left(\frac{15}{2};2\right)$.

1) Les points A, B et C sont-ils alignés ? Justifier.
2) Les points A, B et D sont-ils alignés ? Justifier.

Exercice 2

On considère $E(-7;6)$, $F(3;3)$, $G(-8;-1)$ et $H(4;-5)$.

1) Les droites (EF) et (GH) sont-elles parallèles ? Justifier.
2) On considère $I(x;-5)$. Déterminer x pour que (EF) et (GL) soient parallèles.

Exercice 3

$ABCD$ est un rectangle. E est le symétrique de C par rapport à B. F est le symétrique de A par rapport à D. G est défini par $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

1) Dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right)$, donner les coordonnées de A, B, C et D sans justifications.
2) Calculer les coordonnées de E, F et G.
3) Les points E, F et G sont-ils alignés ? Justifier la réponse.

Exercice 4

On considère un triangle ABC. E est le symétrique de B par rapport à C. Les points F et G sont définis par $\overrightarrow{AF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BG} = -2\overrightarrow{BA}$.

1) Dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$, calculer les coordonnées de E, F et G.
2) Démontrer que les points E, F et G sont alignés.

Exercice 5

Dans un repère, on considère $A(-2;3)$, $B(3;-1)$ et $C(4;4)$.

1) Calculer les coordonnées de K tel que $\overrightarrow{AK} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$.
2) Calculer les coordonnées de L tel que $\overrightarrow{AL} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$
3) Calculer les coordonnées de M tel que $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{6}\overrightarrow{BC}$.
4) Démontrer que $K; L$ et M sont alignés.

Exercice 6

Dans un repère orthonormé, on considère $A(2;2)$, $B(-3;-6)$ et $C(10;-3)$.

1) Déterminer les coordonnées de D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.
2) Calculer AB, AC et BC. Que peut-on en déduire pour le triangle ABC ?
3) Calculer les coordonnées du milieu I de $[BC]$.
4) Calculer les coordonnées de J tel que $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{IA}$.
5) Démontrer que A est le milieu de $[IJ]$.
6) Calculer les coordonnées de K défini par $2\overrightarrow{JK} + 3\overrightarrow{CK} - 2\overrightarrow{AK} = 2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CD}$.
7) Démontrer que D, J et K sont alignés.

Exercice 7

On considère un triangle ABC et les points M, N et P définis par $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

1) Exprimer $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{NP}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2) Démontrer que M, N et P sont alignés.

Exercice 8

On considère un triangle ABC et les points K, L et M définis par $\overrightarrow{AK} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AL} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{6}\overrightarrow{BC}$.

On va démontrer de deux manières que K, L et M sont alignés.

1) Dans le repère $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$
   a. Déterminer les coordonnées de K, L et M.
   b. Démontrer que ces trois points sont alignés.
2) A l'aide des vecteurs
   a. Décomposer $\overrightarrow{KL}$ et $\overrightarrow{KM}$ avec les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
   b. Démontrer que K, L et M sont alignés.

Exercice 9

On considère le triangle ABC et les points D, E et F tels que $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BF} = 2\overrightarrow{BC}$.

On va démontrer de trois manières différentes que D, E et F sont alignés.

1) Dans le repère $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$
   a. Déterminer les coordonnées de D, E et F.
   b. Démontrer que ces points sont alignés.
2) Avec les vecteurs
   a. Décomposer $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DF}$ à l'aide des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
   b. Démontrer que D, E et F sont alignés.
3) Géométriquement
   a. On construit la parallèle à (DE) passant par C. Elle coupe $[AB]$ en un point I. Démontrer que E est le milieu de $[AI]$.
   b. En déduire que I est le milieu de $[EB]$.
   c. Démontrer que (CI) est parallèle à (EF) et conclure.

Partie B : Equation de droites, vecteur directeur

Exercice 1

1) Tracer la droite d passant par $A(-1; 2)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-\frac{2}{3}\end{pmatrix}$.
2) $B(5; -4)$ appartient-il à d ? Justifier.

Exercice 2

On considère la droite d d'équation $y = -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$.

Déterminer un vecteur directeur de d à coordonnées entières.

Exercice 3

On considère une droite de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$. Déterminer son coefficient directeur.

Exercice 4

Dans chacun des cas suivants, déterminer une équation de la droite d passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

1) $A(-3; 2)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$
2) $A(-2; 2)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\-\frac{1}{5}\end{pmatrix}$
3) $A(0; -4)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}28\\35\end{pmatrix}$

Exercice 5

Dans chaque cas, déterminer une équation cartésienne de la droite passant par A et parallèle à d.

1) $A(2; -3)$ et $d : 2x - y + 2 = 0$
2) $A(0; -3)$ et $d : -3x + 4y - 5 = 0$

Exercice 6

1) Dans un repère, placer les points $A(-2;4)$, $B(2;2)$, $C(-5;0)$ et D tel que $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{AB}$.
2) Quelle est la nature du quadrilatère $ABDC$? Justifier.
3) Déterminer les coordonnées de D.
4) On considère la droite d d'équation $6x + y - 14 = 0$. Vérifier que B et D appartiennent à d.
5) Déterminer une équation cartésienne de (AC).
6) Démontrer que (BD) et (AC) sont sécantes et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection E.
7) Calculer les coordonnées de K milieu de $[AB]$ et de L milieu de $[CD]$.
8) Démontrer que E, K et L sont alignés.

Exercice 7

On considère quatre droites $d_1 : 6x + 9y + 18 = 0$; $d_2 : 4x + 6y - 5 = 0$; $d_3 : 5x - y + 15 = 0$;
$d_4 : \frac{2}{\sqrt{3}}x + \sqrt{3} \times y + 2\sqrt{3} = 0$

1) Parmi ces droites, lesquelles sont parallèles ?
2) Les droites d_1 et d_2 sont-elles confondues ? Même question pour d_1 et d_4.

Exercice 8

On considère un réel m et la droite d d'équation $x + my + 3 = 0$.
Dans chaque cas, peut-on déterminer m pour que la condition soit vérifiée ? Si oui, le déterminer.

1) $\vec{u}\binom{3}{2}$ est un vecteur directeur de d.
2) $A(-2;3)$ appartient à d.
3) d est parallèle à la droite d'équation $3x - y = 0$.
4) d est parallèle à l'axe des abscisses.
5) d est parallèle à l'axe des ordonnées.
6) d passe par l'origine du repère.
7) d passe par le point $J(0;1)$

Exercice 9

$ABCD$ est un parallélogramme. Le point M est à l'intérieur de ce parallélogramme. Les parallèles à (AB) et (AD) passant par M coupent les côtés en E, F, G et H tels que $E \in [AD], F \in [CD]$, $G \in [BC]$ et $H \in [AB]$.
On note $(x;y)$ les coordonnées de M dans le repère $\left(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}\right)$.

1) Donner les coordonnées de E, F, G et H en fonction de x et y.
2) Déterminer une condition sur x et y pour que (EF) et (GH) soient parallèles.
3) Quel est l'ensemble des points M tels que (EF) et (GH) soient parallèles ?

Exercice 10

On considère un nombre réel m et on note d_m la droite d'équation $(2m-1)x - my + 3x + 1 = 0$.

1) Tracer d_0, d_1, d_2 et d_{-1}.
2) Montrer que toutes les droites d_m passent par un même point I dont on précisera les coordonnées.
3) Existe-t-il des droites d_m passant par $A(-1;4)$? Si oui, lesquelles ?
4) Existe-t-il des droites d_m de vecteur directeur $\vec{u}\binom{2}{-1}$? Si oui, lesquelles ?