Variables aléatoire discrètes

I) Définition

Définir une loi de probabilité P d'une variable aléatoire X c'est associer à chaque valeur x_i de la variable aléatoire un nombre positif p_i tel que la somme des p_i est égale à 1

Déterminer la loi de probabilité de X, c'est donner, sous forme d'un tableau, les probabilités p_i des valeurs x_i

Exemple 1

Considérons une pièce de monnaie bien équilibrée

On lance deux fois de suite cette pièce

On convient que chaque fois que l'on obtient « pile » on gagne 3 € et que chaque fois que l'on obtient « face » on perd 1 €.

On peut donc définir une fonction X qui a chaque issue de Ω associe le « gain » obtenu, cette fonction prend donc les valeurs 6 (pour PP), 2 pour PF ou FP et – 2 pour FF

Loi de probabilité de X

Gains x_i	6	2	-2
Probabilités p_i = P (X = x_i)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Exemple 2

Un sac contient 15 jetons bleus, 10 jetons rouges, 3 jetons verts et 2 jetons noirs, tous indiscernables au toucher.

Un joueur extrait au hasard un jeton de ce sac et note sa couleur : B pour bleu, R pour rouge, V pour vert et N pour noir.

Il marque 3 points si le jeton est rouge, 5 points si le jeton est vert, mais perd 1 point si le jeton est bleu et perd 3 points si le jeton est noir.

Soit G la variable aléatoire qui donne le nombre de points (positif ou négatif) obtenu par le joueur.

Déterminer la loi de probabilité de la variable G.

Réponse :

Loi de probabilité de G :

n_i	– 3	– 1	3	5
p_i = P(G = n_i)	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

II) Espérance,variance,écart type

Soit X une variable aléatoire de loi de probabilité (x_i , p_i) $1 \leq i \leq r$
On appelle :

• Espérance de X le nombre noté E(X) défini par

E(X) = $p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_rx_r$ noté aussi E(X) = $\sum_{i=1}^{i=r} p_i\ x_i$

• Variance de X le nombre noté V(X) défini par

V(X) = $p_1(x_1 - \mathrm{E(X)})^2 + p_2(x_2 - \mathrm{E(X)})^2 + \ldots + p_r(x_r - \mathrm{E(X)})^2$ noté aussi

V(X) = $\sum_{i=1}^{i=r} p_i\ (x_i - \mathrm{E(X)})^2$

• Ecart type de X le nombre noté σ(X) défini par
σ(X) = $\sqrt{\mathrm{V(X)}}$

Exemples :

En reprenant les exemples vus plus haut :

Exemple 1 :

E(X) = $6 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{2} - 2 \times \frac{1}{4} = 2$

V(X) = $\frac{1}{4}(6-2)^2 + \frac{1}{2}(2-2)^2 + \frac{1}{4}(-2-2)^2 = 4 + 4 = 8$

σ(X) = $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Exemple 2 :

Les calculs donnent :

E(G) = $\frac{17}{15}$

V(G) = $\frac{1571}{225} \approx 6{,}98$

σ(G) = $\sqrt{\frac{1571}{225}} \approx 2{,}64$

2) Remarques

• L'espérance d'une variable aléatoire est la moyenne des valeurs qu'elle prend en considérant que les probabilités sont les fréquences des valeurs.

•Lorsqu'une variable aléatoire est définie comme un gain algébrique lors d'un jeu, l'espérance représente le gain moyen après un très grand nombre de parties.

Ainsi une espérance nulle indique un jeu équitable, une espérance négative indique un jeu défavorable au joueur et une espérance positive indique un jeu favorable au joueur.

III Loi binomiale

Lorsqu'on procède à n épreuves de Bernoulli indépendantes avec une probabilité de succès p, la variable aléatoire X qui prend pour valeurs le nombre de succès obtenus suit une loi binomiale de paramètres n et p, notée $\mathcal{B}(n\ ,\ p\ )$ et à pour loi de probabilité :

$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}$ pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$

On a $E(x) = np$

et $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$

Exemples :

1) On considère l'expérience suivante : On lance 10 fois de suite un dé bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On appelle X la variable aléatoire qui prend la valeur correspondant au nombre de fois où la face 1 apparaît.

a) Quelle est la loi suivie par la variable X ?

b) Quelle est la probabilité de l'événement $X = 3$?

c) Quelle est la probabilité que la face 1 apparaisse au moins 1 fois ?

d) Calculer l'espérance et l'écart type de X

Solution :

a) Les lancers étant identiques et indépendants X suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{1}{6}$ $\qquad \mathcal{B}(10\ ,\ \frac{1}{6})$

b) $P(X= 3) = \binom{10}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^7 = 120 \times \frac{5^7}{6^{10}} \approx 0{,}155$

c) L'événement « la face 1 apparaît au moins une fois » correspond à l'événement « $X \geq 1$ » qui a pour événement contraire « $X = 0$ »

Donc on a $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{10}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^{10} \approx 0{,}838$

d) $E(X) = 10 \times \frac{1}{6} = \frac{5}{3} \approx 1{,}67$ et

$\sigma(X) = \sqrt{10 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6}} \approx 1{,}18$

2) Deux joueurs Alain et Bernard s'affrontent dans un tournoi de tennis. Alain et Bernard jouent 9 matchs. La probabilité qu'Alain gagne un match est 0,6.Le vainqueur est celui qui gagne le plus de matchs. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de matchs gagnés par Bernard.

a) Quelle est la loi suivie par X ?

b) Ecrire l'événement « Bernard gagne le tournoi » à l'aide de X puis calculer sa probabilité.

Solution :

a) Les matchs étant identiques et leurs résultats indépendants X suit une loi binomiale de paramètres $n = 9$ et $p = 0{,}4$ $\mathcal{B}(9\ ,\ 0{,}4)$

b) Bernard gagne le tournoi si il gagne au moins 5 matchs, donc si l'événement « $X \geq 5$ » est réalisé

Or P($X \geq 5$) = P($X = 5$) + P($X = 6$) + P($X = 7$) + P($X = 8$) +P($X = 9$)

P($X \geq 5$)= $\binom{9}{5}\ 0{,}4^5\ 0{,}6^4 + \binom{9}{6}\ 0{,}4^6\ 0{,}6^3 + \binom{9}{7}\ 0{,}4^7\ 0{,}6^2 + \binom{9}{8}\ 0{,}4^8\ 0{,}6^1 + \binom{9}{9}\ 0{,}4^9$

P(X≥ 5) ≈ 0,267