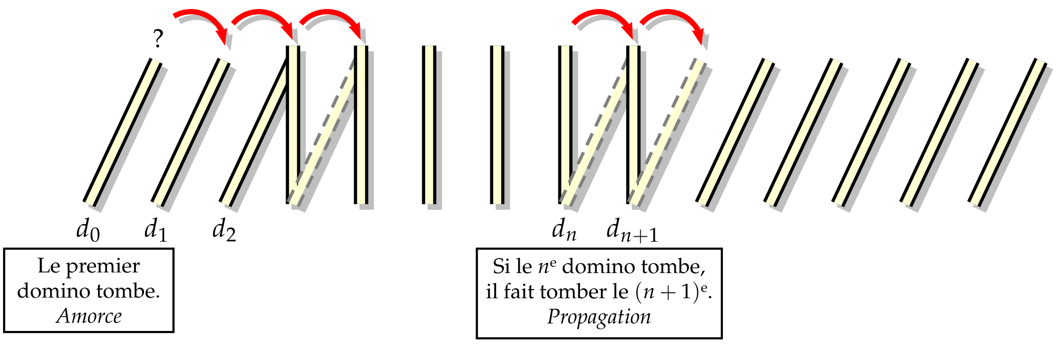
Raisonnement par récurrence.
Limite d'une suite

Table des matières

1 Raisonnement par récurrence

1.1 Effet domino

Le raisonnement par récurrence s'apparente à la théorie des dominos. On considère une file de dominos espacés régulièrement.



- Le premier domino d_0 tombe. C'est l'amorce.
- Les dominos sont suffisamment proches pour que si l'un des dominos d_n tombe le suivant d_{n+1} tombe également. C'est la propagation.

On peut alors conclure que tous les dominos de la file tombent les uns après les autres.

Transposons cet effet domino à une propriété mathématique.
Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0,3$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + \dfrac{1}{2}$

Soit la propriété (P) : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < u_n < 1$

- Le premier domino tombe :
  $u_0 = 0,3$ donc $0 < u_0 < 1$. La propriété est amorcée.
- Si l'un des dominos tombe le suivant tombe également :
  si $0 < u_n < 1 \ \Rightarrow\ 0 < \dfrac{1}{2}u_n < \dfrac{1}{2} \ \Rightarrow\ \dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{2}u_n + \dfrac{1}{2} < 1.$
  On a ainsi $0 < \dfrac{1}{2} < u_{n+1} < 1$. La propriété se propage.

Comme le premier domino est tombé et que les autres tombent par propagation, tous les dominos tombent et donc la propriété est bien vérifiée pour tout entier naturel.

1.2 Intérêt du raisonnement par récurrence

Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n + 1$

On souhaiterait obtenir une formule permettant de calculer explicitement u_n en fonction de n. À première vue, cette formule ne saute pas aux yeux.
Dans une telle situation, le calcul des premiers termes est souvent intéressant pour dégager une relation.

Calculons les premiers termes :

$$\begin{aligned} u_1 &= 2u_0 + 1 = 1 && (2^1 - 1) \\ u_2 &= 2u_1 + 1 = 3 && (2^2 - 1) \\ u_3 &= 2u_2 + 1 = 7 && (2^3 - 1) \\ u_4 &= 2u_3 + 1 = 15 && (2^4 - 1) \\ u_5 &= 2u_4 + 1 = 31 && (2^5 - 1) \end{aligned}$$

La suite (u_n) semble obéir à une loi toute simple : en ajoutant 1 à chaque terme, on obtient les puissances successives de 2.

Nous pouvons donc émettre la conjecture suivante : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n = 2^n - 1$

Attention, une conjecture n'est pas une preuve (ni une affirmation nécessairement vraie, certaines conjectures se révèlent parfois fausses...). Ce n'est que l'énoncé d'une propriété résultant d'un certain nombre d'observations.
Alors comment confirmer, par une démonstration, la propriété conjecturée ci-dessus ?
Notons (P) la propriété, définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n = 2^n - 1$
Supposons un instant, que pour un certain entier n, on ait effectivement la propriété $u_n = 2^n - 1$

Alors, on aurait : $u_{n+1} = 2u_n + 1 = 2(2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 1$
Ce qui correspond à la propriété (P) à l'odre $n + 1$.

Autrement dit, si la propriété est vraie à un certain rang n alors elle l'est également au rang suivant $n + 1$. On dit que la propriété (P) est *héréditaire*.

On a vérifié que la propriété (P) était vraie au rang 0, 1, 2, 3, 4, 5. On dit que la propriété (P) est *initialisée*. Mais comme elle est héréditaire, elle sera vraie encore au rang $n = 6$, puis au rang $n = 7$ etc. Si bien que notre propriété est finalement vraie à tout rang n.

1.3 Axiome de récurrence

Définition 1 : Soit une propriété (P_n) définie sur $\mathbb{N}$.

- Si la propriété est *initialisée* à partir du rang 0 ou n_0
- et si la propriété est *héréditaire* à partir du rang 0 ou n_0 (c'est à dire que pour tout $n \geqslant 0$ ou $n \geqslant n_0$ alors $\ P_n \Rightarrow P_{n+1}$

Alors : la propriété est vraie à partir du rang 0 ou n_0

Remarque : Le raisonnement par récurrence s'apparente à l'effet domino :

Si un domino tombe alors le suivant tombera.

Si le premier tombe alors le second tombera, puis le troisième, puis le quatrième. . .

Conclusion : si le premier domino tombe alors tous tomberont.

Le raisonnement par récurrence comporte deux phases :

- Prouver que la propriété est initialisée
- Prouver que la propriété est héréditaire

Si on montre ces deux phases la propriété est démontrée pour tout entier naturel.

⚠ Il faut veiller à ce que les deux conditions « initialisation » et « hérédité » soient vérifiées. En effet si l'une des deux conditions n'est pas respectée, on arrive à une conclusion erronée comme le prouvent les deux exemples du paragraphe 1.6

1.4 Inégalité de Bernoulli

Théorème 1 : Soit un réel a strictement positif. On a alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (1+a)^n \geqslant 1+na$$

ROC Démontrons cette inégalité par récurrence.

- **Initialisation :** : $(1+a)^0 = 1$ et $1+0a = 1$, donc $(1+a)^0 \geqslant 1+0\times a$. La propriété est initialisée.
- **Hérédité :** On suppose que $(1+a)^n \geqslant 1+na$ montrons que $(1+a)^{n+1} \geqslant 1+(n+1)a$

  Par hypothèse : $(1+a)^n \geqslant 1+na$ comme $1+a>0$ on a :

$$\begin{aligned}(1+a)(1+a)^n &\geqslant (1+a)(1+na)\\ (1+a)^{n+1} &\geqslant 1+na+a+na^2\\ &\geqslant 1+(n+1)a+na^2 \geqslant 1+(n+1)a\end{aligned}$$

  La proposition est héréditaire

Par initialisation et hérédité : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad (1+a)^n \geqslant 1+na$

Remarque : Pour l'hérédité, on montre l'inégalité en utilisant la "transitivité" : $a>b$ et $b>c$ alors $a>c$

1.5 Application aux suites

La suite (u_n) est définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \; u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$

a) Démontrer que pour tout naturel n, $0 < u_n < 2$

b) Prouver que la suite est strictement croissante.

✏ ✏

a) Montrons l'encadrement de u_n par récurrence.

Initialisation : : on a $u_0 = 1$ donc $0 < u_0 < 2$. La propriété est initialisée.

Hérédité : : On suppose que $0 < u_n < 2$, montrons que $0 < u_{n+1} < 2$.

$$0 < u_n < 2 \quad \Rightarrow \quad 2 < u_n + 2 < 4$$

comme la fonction racine est croissante sur $\mathbb{R}_+$,

$$\sqrt{2} < \sqrt{u_n+2} < 2 \quad \Rightarrow \quad 0 < \sqrt{2} < u_{n+1} < 2$$

La proposition est héréditaire.

Par initialisation et hérédité, $\forall n \in \mathbb{N},\ \ 0 < u_n < 2$.

b) Montrons par récurrence que la suite (u_n) est croissante.

Initialisation : : on a $u_1 = \sqrt{3}$ donc $u_1 > u_0$. La proposition est initialisée.

Hérédité : : supposons que $u_{n+1} > u_n$, montrons que $u_{n+2} > u_{n+1}$.

$$u_{n+1} > u_n \quad \Rightarrow \quad u_{n+1} + 2 > u_n + 2$$

comme la fonction racine est croissante sur $\mathbb{R}_+$,

$$\sqrt{u_{n+1}+2} > \sqrt{u_n+2} \quad \Rightarrow \quad u_{n+2} > u_{n+1}$$

La proposition est donc héréditaire.

Par initialisation et hérédité, la suite (u_n) est croissante.

1.6 Situations amenant à une conclusion erronée

- **Situation 1 :** Hérédité seulement vérifiée

Soit la propriété suivante : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ 3$ divise 2^n
Hérédité : on suppose que 3 divise 2^n, montrons que 3 divise 2^{n+1}.

Si 3 divise 2^n, alors il existe un entier naturel k tel que : $2^n = 3k$
On a, en multipliant par 2 : $2^{n+1} = 2 \times 3k = 3(2k)$. 3 divise donc 2^{n+1}

Conclusion : la proposition est héréditaire mais comme elle n'est jamais initialisée, la proposition ne peut être vraie. Heureusement car cette proposition est fausse !

- **Situation 2 :** Initialisation vérifiée jusqu'à un certain rang.

Soit la propriété suivante : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ n^2 - n + 41$ est un nombre premier

L'initialisation est vérifiée car pour $n = 0$ on obtient 41 qui un nombre premier.

Mais l'hérédité n'est pas assurée bien que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie jusqu'à $n = 40$. On peut le vérifier avec une table de nombres premiers et la liste des premiers termes de la suite (u_n) définie par $u_n = n^2 - n + 41$.

n	u_n	n	u_n	n	u_n	n	u_n
0	41	11	151	22	503	33	1097
1	41	12	173	23	547	34	1163
2	43	13	197	24	593	35	1231
3	47	14	223	25	641	36	1301
4	53	15	251	26	691	37	1373
5	61	16	281	27	743	38	1447
6	71	17	313	28	797	39	1523
7	83	18	347	29	853	40	1601
8	97	19	383	30	911		
9	113	20	421	31	971		
10	131	21	461	32	1033		

Pour $n = 41$, on a : $41^2 - 41 + 41 = 41^2$ qui n'est pas un nombre premier. La propriété est donc fausse.

Conclusion : La véracité d'une proposition pour certaines valeurs au départ ne prouve pas la généralité !

2 Limite d'une suite

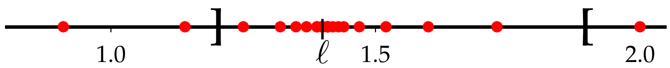
2.1 Limite finie

Définition 2 : On dit que la suite (u_n) a pour limite ℓ si, et seulement si, tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

On note alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$ et l'on dit que la suite (u_n) **converge** vers ℓ

Remarque : Lorsqu'elle existe cette limite est unique (on le montre facilement par l'absurde).

Cette définition traduit l'accumulation des termes u_n autour de ℓ



Conséquence Les suites définies pour tout entier naturel n non nul par :

$$u_n = \frac{1}{n}, \quad v_n = \frac{1}{n^2}, \quad w_n = \frac{1}{n^3}, \quad t_n = \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad \text{ont pour limite } 0$$

Algorithme : Déterminer à partir de quel entier N, u_n est dans un intervalle contenant ℓ.

Soit la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0,1 \\ u_{n+1} = 2u_n(1 - u_n) \end{cases}$$

Cette suite converge vers $\ell = 0,5$. On veut connaître à partir de quel entier N la suite est dans l'intervalle ouvert centré en 0,5 et de rayon 10^{-3}.

Le programme suivant permet de trouver N, grâce à un "Tant que".

On obtient alors :

$N = 5$ et $|u_5 - 0,5| = 3,96\,10^{-4}$

Variables : N : entier U : réel
Entrées et initialisation
  $0,1 \to U$
  $0 \to N$
Traitement
  tant que $|U - 0,5| \geqslant 10^{-3}$
  faire
    $2U(1 - U) \to U$
    $N + 1 \to N$
  fin
Sorties : Afficher N, $|U - 0,5|$

2.2 Limite infinie

Définition 3 : On dit que la suite (u_n) a pour limite $+\infty$ (resp. $-\infty$) si, et seulement si, tout intervalle $]A; +\infty[$ (resp. $]-\infty; B[$) contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

On note alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ resp. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

On dit que la suite **diverge** vers $+\infty$ (resp. $-\infty$)

Remarque : Cette définition traduit l'idée que les termes de la suite arrivent à dépasser A, aussi grand soit-il.

Une suite peut n'avoir aucune limite. Par exemple : $u_n = (-2)^n$. On dit que la suite diverge

Conséquence Les suites définies pour tout entier naturel par :

$$u_n = n, \quad v_n = n^2, \quad w_n = n^3, \quad t_n = \sqrt{n}, \quad \text{ont pour limite } +\infty$$

Algorithme : Déterminer à partir de quel entier N, u_n est supérieur à un nombre donné A (suite croissante).

Soit la suite (u_n) définie par :
$$\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = \frac{4}{3}u_n + 1 \end{cases}$$
On peut montrer que cette suite est croissante et qu'elle diverge vers $+\infty$. On voudrait connaître à partir de quel entier N, u_n est supérieur à 10^3
Le programme suivant, permet de trouver N, grâce à un "Tant que".
On obtient alors :
$N = 25$ et $U = 1325,83$

Variables : N : entier U : réel
Entrées et initialisation
  $-2 \to U$
  $0 \to N$
Traitement
  tant que $U \leqslant 10^3$ **faire**
    $\frac{4}{3}U + 1 \to U$
    $N + 1 \to N$
  fin
Sorties : Afficher N, U

2.3 Limites par comparaison et par encadrement

Théorème 2 : Soit trois suites (u_n), (v_n) et (w_n). Si à partir d'un certain rang, on a :

1) **Théorème d'encadrement ou "des gendarmes"**

$$v_n \leqslant u_n \leqslant w_n \text{ et si } \lim_{n\to+\infty} v_n = \ell \text{ et } \lim_{n\to+\infty} w_n = \ell \quad \text{alors} \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$$

2) **Théorème de comparaison**

- $u_n \geqslant v_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
- $u_n \leqslant w_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

ROC **Démonstration** : Seule la preuve du théorème de comparaison en $+\infty$ est exigible.

On sait que : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, donc pour tout réel A, il existe un entier N tel que si $n > N$ alors $v_n \in]A;+\infty[$

Comme $u_n > v_n$ à partir du rang p donc si $n > \max(N, p)$ alors $u_n \in]A;+\infty[$

On a donc bien : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Exemples :

- Démontrer que la suite (u_n) définie par : $u_n = \dfrac{\sin n}{n+1}$ est convergente.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad -\frac{1}{n+1} \leqslant \frac{\sin n}{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1}$$

$$\text{or} \quad \lim_{n \to +\infty} -\frac{1}{n+1} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

Donc, d'après le théorème des gendarmes on a : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$

- Montrer que la suite (v_n) définie par : $v_n = n + \sin n$ diverge vers $+\infty$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n + \sin n \geqslant n - 1$$

$$\text{or} \quad \lim_{n \to +\infty} n - 1 = +\infty$$

Donc d'après le théorème de comparaison, on a : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} v_n = +\infty$

2.4 Opérations sur les limites

Les théorèmes suivants sont admis. Il est assez intuitif de penser que la limite de la somme, du produit ou du quotient est la somme, le produit ou le quotient des limites. Seuls 4 cas représentent des formes indéterminées. Il faudra alors soit essayer de changer la forme de la suite, soit utiliser le théorème de comparaison ou des gendarmes, soit le théorème sur les suites monotones (voir plus loin) pour pouvoir conclure.

2.4.1 Limite d'une somme

Si (u_n) a pour limite	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Si (v_n) a pour limite	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $(u_n + v_n)$ a pour limite	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F. Ind.

Remarque : F. Ind. = forme indéterminée

Exemples : Déterminer les limites des suites suivantes :

- $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = 3n + 1 + \dfrac{2}{n}$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{n \to +\infty} 3n + 1 = +\infty \\ \displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{2}{n} = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Par somme} \\ \displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty \end{array}$$

- $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n + 5 - \dfrac{1}{n}$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0 \\ \displaystyle\lim_{n \to +\infty} 5 - \frac{1}{n} = 5 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Par somme} \\ \displaystyle\lim_{n \to +\infty} v_n = 5 \end{array}$$

- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = n^2 - n + 2$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{n \to +\infty} n^2 = +\infty \\ \displaystyle\lim_{n \to +\infty} -n + 2 = -\infty \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{F. Ind.} \\ \text{Trouver une} \\ \text{autre méthode} \end{array}$$

2.4.2 Limite d'un produit

Si (u_n) a pour limite	ℓ	$\ell \neq 0$	0	∞
Si (v_n) a pour limite	ℓ'	∞	∞	∞
alors $(u_n \times v_n)$ a pour limite	$\ell \times \ell'$	∞*	F. ind.	∞*

*Appliquer la règle des signes

Exemples : Déterminer les limites des suites suivantes :

a) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad u_n = n^2 - n + 2 = n^2\left(1 - \dfrac{1}{n} + \dfrac{2}{n^2}\right)$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 1-\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n^2}=1 \end{array}\right\} \text{Par produit } \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

$\forall n \in \mathbb{N},\quad v_n = (2-n) \times 3^n$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} 3^n = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 2-n = -\infty \end{array}\right\} \text{Par produit } \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$$

$\forall n \in \mathbb{N},\quad w_n = \dfrac{1}{n+1} \times (n^2+3)$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} n^2+3 = +\infty \end{array}\right\} \text{F. Ind Trouver une autre forme}$$

2.4.3 Limite d'un quotient

Si (u_n) a pour limite	ℓ	$\ell \neq 0$	0	ℓ	∞	∞
Si (v_n) a pour limite	$\ell' \neq 0$	0 (1)	0	∞	ℓ'	∞
alors $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ a pour limite	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	∞*	F. ind.	0	∞*	F. ind.

*Appliquer la règle des signes (1) 0 signe constant

Exemples : Déterminer les limites des suites suivantes :

a) $\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n = \dfrac{5}{2n^2+1}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} 5 = 5 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 2n^2+3 = +\infty \end{array}\right\} \text{Par quotient } \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$$

b) $\forall n \in \mathbb{N},\quad v_n = \dfrac{1-n}{0,5^n}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} 1-n = -\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 0,5^n = 0^+ \end{array}\right\} \text{Par quotient } \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$$

c) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad w_n = \dfrac{n^2+3}{n+1} = \dfrac{n+\dfrac{3}{n}}{1+\dfrac{1}{n}}$

Simplification par n

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} n+\dfrac{3}{n} = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 1+\dfrac{1}{n} = 1 \end{array}\right\} \text{Par quotient } \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = +\infty$$

2.5 Limite d'une suite géométrique

Théorème 3 : Soit q un réel. On a les limites suivantes :

- Si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$
- Si $q = 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 1$
- Si $-1 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$
- Si $q \leqslant -1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n$ n'existe pas

ROC **Démonstration :** Seule la preuve de la première limite est exigible.
On démontre par récurrence l'inégalité de Bernoulli. On a donc, pour $a > 0$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (1+a)^n \geqslant 1 + na$$

On pose $q = 1 + a$ donc si $a > 0$ on a $q > 1$. L'inégalité devient :

$$q^n \geqslant 1 + na$$

Comme $a > 0$ on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + na = +\infty$

D'après le théorème de comparaison on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$

Remarque : Pour démontrer la troisième limite, on peut poser $Q = \dfrac{1}{|q|}$, avec $0 < |q| < 1$ donc $Q > 1$. On revient alors à la première limite et l'on conclut avec le quotient sur les limites.

Exemple : Soit une suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n + 5 \end{cases}$

On pose la suite (v_n) telle que $v_n = u_n + 5$

1) Montrer que la suite (v_n) est géométrique
2) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n
3) En déduire la limite de (u_n)

✏ ✏

1) Il faut donc montrer que $\forall x \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} = qv_n$

$$v_{n+1} = u_{n+1} + 5 = (2u_n + 5) + 5 = 2(u_n + 5) = 2v_n$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 2$ et de 1^er^ terme $v_0 = u_0 + 5 = 7$

2) On en déduit alors : $v_n = v_0\, q^n = 7 \times 2^n$ donc $u_n = v_n - 5 = 7 \times 2^n - 5$

3) D'après le théorème ci-dessus, $2 > 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$

Par somme et produit, on a donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

2.6 Convergence d'une suite monotone

2.6.1 Suites majorées, minorées et bornées

Définition 4 : On dit que la suite (u_n) est majorée si, et seulement si, il existe un réel M tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leqslant M$$

On dit que la suite(u_n) est minorée si, et seulement si, il existe un réel m tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geqslant m$$

Si (u_n) est majorée et minorée, on dit que la suite est bornée.

Exemple : Montrer que la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \quad \text{est bornée par l'intervalle } \left[\frac{1}{2};1\right]$$

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \leqslant \overbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}^{n \text{ termes}}$$
$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \leqslant n \times \frac{1}{n}$$
$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \leqslant 1$$

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \geqslant \overbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n}}^{n \text{ termes}}$$
$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \geqslant n \times \frac{1}{2n}$$
$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \geqslant \frac{1}{2}$$

On a donc : $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant 1$

2.6.2 Théorèmes de convergence

Théorème 4 : Divergence

- Si une suite (u_n) est **croissante et non majorée** alors la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.
- Si une suite (u_n) est **décroissante et non minorée** alors la suite (u_n) diverge vers $-\infty$.

ROC **Démonstration :** Soit donc une suite (u_n) croissante et non majorée.
(u_n) n'est pas majorée, donc pour tout intervalle $]A;+\infty[$,

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \text{tel que :} \quad u_N \in]A;+\infty[$$

Comme (u_n) est croissante, on a : $\forall n > N \quad$ alors $\quad u_n > u_N$

Donc : $\forall n > N \quad$ alors $\quad u_n \in]A; +\infty[$

donc à partir d'un certain rang tous les termes de la suite sont dans l'intervalle $]A; +\infty[$. La suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

Exemple : : Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1 \quad$ et $\quad u_{n+1} = u_n + 2n + 3$.

On montre facilement la croissante de la suite et par récurrence que $u_n \geqslant n^2$ (voir exercice). Cette suite diverge donc vers $+\infty$

⚠ La réciproque de ce théorème est fausse, si une suite diverge vers $+\infty$, elle n'est pas nécessairement croissante. Pour s'en convaincre, voici deux suites qui divergent vers $+\infty$ et qui ne sont pas monotones :

$$u_n = n + (-1)^n \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} v_n = n & \text{si } n \text{ est pair} \\ v_n = 2n & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Théorème 5 : Convergence

- Si une suite (u_n) est **croissante et majorée** alors la suite (u_n) converge.
- Si une suite (u_n) est **décroissante et minorée** alors la suite (u_n) converge.

Remarque : Ce théorème est admis.

⚠ Ce théorème permet de montrer qu'une suite converge vers une limite ℓ mais ne donne pas la valeur de cette limite.
On peut seulement dire que, si (u_n) est croissante et majorée par M alors $\ell \leqslant M$ et si (u_n) est décroissante et minorée par m alors $\ell \geqslant m$

Exemple : Soit la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4} \end{cases}$$

1) Montrer que la suite (u_n) est croissante et majorée par 4.
2) En déduire que la suite (u_n) converge. On admet que (u_n) converge vers 4, déterminer à l'aide d'un algorithme, l'entier N à partir duquel $u_n > 3,99$

✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏

1) Montrons par récurrence que la suite (u_n) est croissante et majorée par 4. C'est à dire que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$$

Initialisation : : on a $u_0 = 0$ et $u_1 = \sqrt{4} = 2$, on a donc : $0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 4$

La proposition est initialisée.

Hérédité : : on suppose que $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$, montrons alors que $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 4$.

$$\begin{gathered} 0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4 \\ 0 \leqslant 3u_n \leqslant 3u_{n+1} \leqslant 12 \\ 4 \leqslant 3u_n + 4 \leqslant 3u_{n+1} + 4 \leqslant 16 \end{gathered}$$

Comme la fonction racine est croissante sur $\mathbb{R}_+$

$$\begin{gathered} 2 \leqslant \sqrt{3u_n + 4} \leqslant \sqrt{3u_{n+1} + 4} \leqslant 4 \\ 0 \leqslant 2 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 4 \end{gathered}$$

La proposition est héréditaire

Par initialisation et hérédité, la suite (u_n) est croissante et majorée par 4.

2) (u_n) est croissante et majorée par 4, d'après le théorème des suites monotones, (u_n) est convergente.

On reprend le programme du paragraphe 2.1 en l'adaptant à l'exercice.
On veut que $u_n > 3,99$, donc $|u_n - 4| < 10^{-2}$

On trouve alors : $N = 7$ et $|u_7 - 4| \simeq 0,007$ soit $u_7 \simeq 3,993$

Variables : N : entier U : réel
Entrées et initialisation
  $0 \to U$
  $0 \to N$
Traitement
  tant que $|U - 4| \geqslant 10^{-2}$ **faire**
    $\sqrt{3U+4} \to U$
    $N + 1 \to N$
  fin
Sorties : Afficher N, $|U - 4|$

2.7 La méthode de Héron d'Alexandrie (I$^{\text{er}}$ siècle)

Il s'agit d'une méthode permettant de calculer l'approximation d'une racine carrée.

Cette méthode repose sur la connaissance d'une première valeur approchée de $\sqrt{A}$ notée a.

$$\text{Si} \quad a < \sqrt{A} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{a} > \frac{1}{\sqrt{A}} \quad \Rightarrow \quad \frac{A}{a} > \frac{A}{\sqrt{A}} \quad \Rightarrow \quad \frac{A}{a} > \sqrt{A}$$

On a donc : $a < \sqrt{A} < \dfrac{A}{a}$

De même on peut montrer que si $a > \sqrt{A}$ alors $\dfrac{A}{a} < \sqrt{A} < a$

Algorithme : Une fois connue une valeur de a, on peut donc encadrer $\sqrt{A}$. On réduit alors cet intervalle en prenant la moyenne arithmétique m des deux valeurs a et $\dfrac{A}{a}$. On a alors :

$$m = \frac{1}{2}\left(a + \frac{A}{a}\right)$$

On remplace alors la valeur de a par la valeur de m et on réitère le processus.

On construit alors une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{A}{u_n}\right) \end{cases}$

La convergence est très rapide : à chaque itération, le nombre de décimales exactes est multiplié par deux !

Cependant au I[er] siècle, on ne connaissait pas encore la notation décimale de position, ni même le 0. Le calcul de ces fractions était certainement bien compliqué ! On peut écrire le programme suivant :

On détermine le premier terme en cherchant le carré le plus proche A avec un "Tant que", on affecte cette valeur à U, puis on fait N itérations pour trouver u_N.

Si on cherche la valeur approchée de $\sqrt{431}$ avec 2 itérations, on rentre :

$$A = 431, \quad N = 2$$

On trouve alors :

$$U = \frac{1\,380\,161}{66\,480} \simeq 20{,}760\,544$$

La précision est de : $|U - \sqrt{431}| \simeq 5\,10^{-6}$

Variables : A, N, I entiers
U : réel
Entrées et initialisation
Lire A, N
$0 \to I$
tant que $A > I^2$ **faire**
$I + 1 \to I$
fin
$I - 1 \to U$
Traitement
pour I variant de 1 à N **faire**
$\frac{1}{2}\left(U + \frac{A}{U}\right) \to U$
fin
Sorties : Afficher U, $|U - \sqrt{A}|$