Limites de fonctions

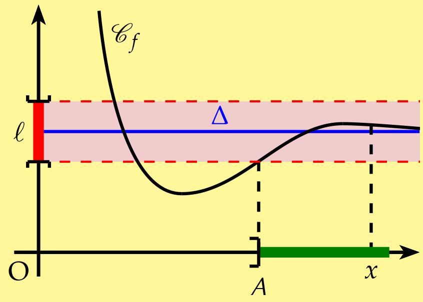
Table des matières

1 Limite finie ou infinie à l'infini

1.1 Limite finie à l'infini

Définition 1 : Dire qu'une fonction f a pour limite ℓ en $+\infty$, signifie que tout intervalle ouvert contenant ℓ, contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand - c'est à dire pour les x d'un intervalle $]A; +\infty[$. On note alors :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$$



La droite Δ d'équation $y = \ell$ est dite **asymptote horizontale** à $\mathscr{C}_f$

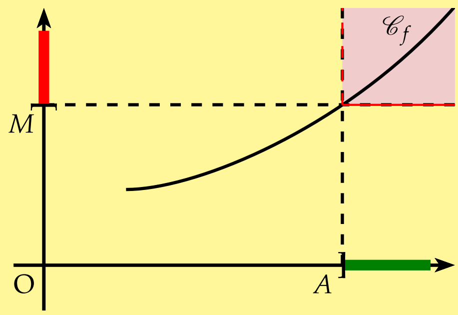
Remarque : On définit de façon analogue $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$.

Exemple : Les fonctions de référence : $x \mapsto \dfrac{1}{x}$, $x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$ et $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ ont des limites nulles en $+\infty$ et $-\infty$ pour les deux premières. Leurs courbes admettent alors l'axe des abscisses comme asymptote horizontale.

1.2 Limite infinie à l'infini

Définition 2 : Dire qu'une fonction f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$, signifie que tout intervalle $]M; +\infty|$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand - c'est à dire pour les x d'un intervalle $]A; +\infty[$. On note alors :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$



Remarque : Cela implique que la fonction f n'est pas majorée

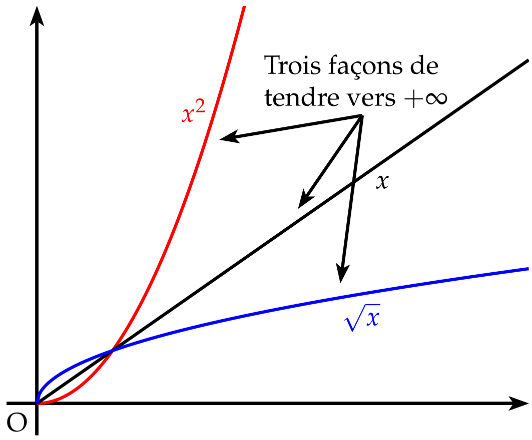
- On définit de façon analogue $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.
- Ainsi que : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Exemple : Les fonctions de référence : $x \mapsto x$, $x \mapsto x^n$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ ont pour limite $+\infty$ en $+\infty$.

La fonction de référence : $x \mapsto x^n$ a pour limite $+\infty$ en $-\infty$ si n est pair et $-\infty$ en $-\infty$ si n est impair.

Une fonction peut tendre vers $+\infty$ en $+\infty$ de plusieurs façons. C'est le cas par exemple des fonctions $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x$ et $x \mapsto \sqrt{x}$.

- $x \mapsto x^2$ tend "rapidement" vers l'infini. La concavité est tournée vers le haut.
- $x \mapsto x$ tend "moyennement" vers l'infini. Pas de concavité.
- $x \mapsto \sqrt{x}$ tend "lentement" vers l'infini. La concavité est tournée vers le bas

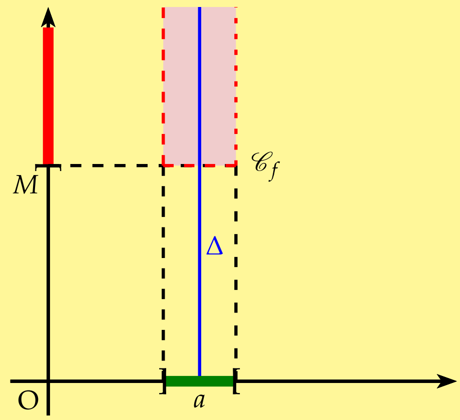


2 Limite infinie en un point

Définition 3 : Dire qu'une fonction f a pour limite $+\infty$ en a, signifie que tout intervalle $]M; +\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez proche de a - c'est à dire pour les x d'un intervalle ouvert contenant a. On note alors :

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

La droite Δ d'équation $x = a$ est dite **asymptote verticale** à $\mathscr{C}_f$



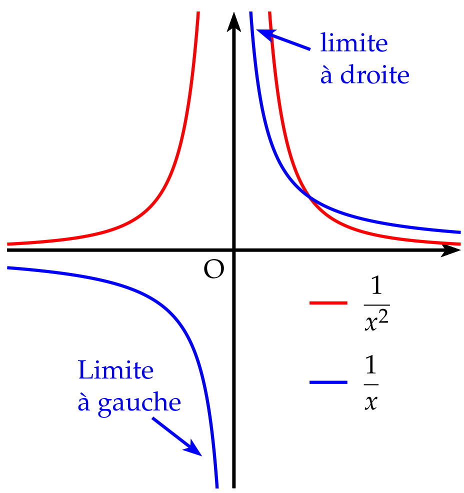
Remarque : on définit de façon analogue $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$

On peut aussi définir la limite à gauche ou à droite de $x = a$ lorsque la limite en $x = a$ n'existe pas. On notera alors :

limite à gauche : $\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x)$

limite à droite : $\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$

Exemple : La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ a pour limite $+\infty$ en 0. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ n'admet pas de limite en 0, mais admet une limite à gauche $(-\infty)$ et à droite $(+\infty)$ de 0.



3 Limites des fonctions élémentaires

Limites en l'infini

$f(x)$	x^n	$\dfrac{1}{x^n}$	$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$
$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$	0
$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)$	$+\infty$ si n pair $-\infty$ si n impair	0	non défini	non défini

Limites en 0

$f(x)$	$\dfrac{1}{x^n}$	$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$
$\displaystyle\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)$	$+\infty$	$+\infty$
$\displaystyle\lim_{\substack{x\to0\\x<0}} f(x)$	$+\infty$ si n pair $-\infty$ si n impair	non défini

4 Opérations sur les limites

4.1 Somme de fonctions

Si f a pour limite	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Si g a pour limite	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $f+g$ a pour limite	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F. Ind.

Exemples :

1) Limite en $+\infty$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = x + 3 + \dfrac{1}{x}$

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x+3 = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0\end{array}\right\} \quad \begin{array}{l}\text{Par somme} \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\end{array}$$

2) Limite en $+\infty$ et $-\infty$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 + x$

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} x = +\infty\end{array}\right\} \quad \begin{array}{l}\text{Par somme} \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to-\infty} x = -\infty\end{array}\right\} \quad \begin{array}{l}\text{Par somme, on ne peut conclure} \\ \textbf{Forme indéterminée : } +\infty-\infty\end{array}$$

4.2 Produit de fonctions

Si f a pour limite	ℓ	$\ell \neq 0$	0	∞
Si g a pour limite	ℓ'	∞	∞	∞
alors $f \times g$ a pour limite	$\ell \times \ell'$	∞*	F. ind.	∞*

*Appliquer la règle des signes

Exemples :

1) Limite en $-\infty$ de la fonction précédente : $f(x) = x^2 + x$

Pour lever la forme indéterminée, on change la forme de $f(x)$.

$$f(x) = x^2 + x = x^2\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

On a alors avec le produit :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} 1 + \dfrac{1}{x} = 1\end{array}\right\} \quad \begin{array}{l}\text{Par produit} \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty\end{array}$$

2) Limite en $+\infty$ de la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(x) = x - \sqrt{x}$

On ne peut résoudre par la somme car c'est une forme indéterminée, on change alors la forme de $f(x)$

$$f(x) = x - \sqrt{x} = x\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 1\end{array}\right\} \quad \begin{array}{l}\text{Par produit} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\end{array}$$

3) Limite à droite de 0 de la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \dfrac{1}{x}\sin x$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \dfrac{1}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \sin x = 0\end{array}\right\} \quad \begin{array}{l}\text{Par produit, on ne peut conclure} \\ \textbf{Forme indéterminée } 0 \times \infty\end{array}$$

4.3 Quotient de fonctions

Si f a pour limite	ℓ	$\ell \neq 0$	0	ℓ	∞	∞
Si g a pour limite	$\ell' \neq 0$	0 (1)	0	∞	ℓ' (1)	∞
alors $\dfrac{f}{g}$ a pour limite	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	∞*	F. ind.	0	∞*	F. ind.

*Appliquer la règle des signes (1) doit avoir un signe constant

Exemples :

1) Limite en -2 de la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{-2\}$ par : $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+2}$

On a le tableau de signes de $x + 2$:

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$	

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-2} 2x-1=-5 \\ \lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}} x+2=0^+\end{array}\right\} \quad \begin{array}{l}\text{Par quotient}\\ \lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}} f(x)=-\infty\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}} x+2=0^-\end{array}\right\} \quad \lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}} f(x)=+\infty$$

On en déduit alors une asymptote verticale d'équation $x=-2$.

2) Limite en $+\infty$ de la fonction f définie par : $f(x)=\dfrac{2x+1}{3x+2}$

Comme le numérateur et le dénominateur tendent vers l'infini en $+\infty$, nous avons une forme indéterminée : $\dfrac{\infty}{\infty}$. Il faut donc changer la forme de $f(x)$.

$$f(x)=\frac{2x+1}{3x+2}=\frac{x\left(2+\dfrac{1}{x}\right)}{x\left(3+\dfrac{2}{x}\right)}=\frac{2+\dfrac{1}{x}}{3+\dfrac{2}{x}}$$

On a alors :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} 2+\dfrac{1}{x}=2 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 3+\dfrac{2}{x}=3\end{array}\right\} \quad \begin{array}{l}\text{Par quotient}\\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\dfrac{2}{3}\end{array}$$

4.4 Conclusion

Il existe donc quatre formes indéterminées (comme avec les limites de suites) où les opérations sur les limites ne permettent pas de conclure. Dans les cas d'indétermination, il faudra chercher à mettre le terme du plus haut degré en facteur (pour les polynômes et les fonctions rationnelles), à simplifier, à multiplier par la quantité conjuguée (pour les fonctions irrationnelles), à utiliser un théorème de comparaison, à effectuer un changement de variable …

5 Limite d'une fonction composée

Théorème 1 : Soit deux fonctions f, g. Soient a, b et c des réels ou $+\infty$ ou $-\infty$.

$$\text{Si} \quad \lim_{x\to a} f(x)=b \quad \text{et} \quad \lim_{x\to b} g(x)=c \quad \text{alors} \quad \lim_{x\to a} g\left[f(x)\right]=c$$

Exemples : Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$ avec $h(x)=\sqrt{2+\dfrac{1}{x^2}}$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} k(x)$ avec $k(x)=\cos\left(\dfrac{1}{x^2+1}\right)$

1) On pose $f(x) = 2 + \dfrac{1}{x^2}$ et $g(x) = \sqrt{x}$. On a alors : $h(x) = g\left[f(x)\right]$.
On calcule alors les limites :

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} 2 + \dfrac{1}{x^2} = 2 \\ \lim\limits_{x \to 2} \sqrt{x} = \sqrt{2} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \text{Par composition, on a :} \\ \lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \sqrt{2} \end{array}$$

Remarque : On peut éventuellement rédiger en faisant un changement de variable. On pose :

$$X = 2 + \frac{1}{x^2} \quad \text{donc} \quad h(x) = \sqrt{X}$$

On a alors :

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} X = \lim\limits_{x \to +\infty} 2 + \dfrac{1}{x^2} = 2 \\ \lim\limits_{X \to 2} \sqrt{X} = \sqrt{2} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \text{Par composition, on a :} \\ \lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \sqrt{2} \end{array}$$

2) On pose $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ et $g(x) = \cos x$. On a alors : $k(x) = g\left[f(x)\right]$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2+1} = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \text{Par composition, on a :} \\ \lim\limits_{x \to +\infty} k(x) = 1 \end{array}$$

Théorème 2 : Limites fonctions et suites

Soit une suite (u_n) définie par : $u_n = f(n)$. f est alors la fonction réelle associée à la suite (u_n). Soit a un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$

$$\text{Si} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = a \quad \text{alors} \quad \lim_{n \to +\infty} u_n = a$$

Exemple : Soit la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par : $u_n = \sqrt{2 + \dfrac{1}{n^2}}$.

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{2 + \dfrac{1}{x^2}}$.

On a vu plus haut que : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \sqrt{2}$

On en déduit que la suite (u_n) converge vers $\sqrt{2}$

⚠ La réciproque de ce théorème est fausse. On peut en effet avoir une suite (u_n) qui admet une limite sans que la fonction associée en admette une. Pour s'en convaincre :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = 2 & \text{si } x \in \mathbb{N} \\ f(x) = 1 & \text{sinon} \end{cases}$

La limite de f en $+\infty$ n'existe manifestement pas tandis que la suite (u_n) définie par $u_n = f(n) = 2$ admet, elle, comme limite 2 !

6 Théorèmes de comparaison

Théorème 3 : f, g, et h sont trois fonctions définies sur l'intervalle $I =]b; +\infty[$ et ℓ un réel.

1) **Théorème des « Gendarmes »**
   Si pour tout $x \in I$, on a : $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$ **et si** :
   $$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} h(x) = \ell \quad \text{alors} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$$
2) **Théorème de comparaison**
   Si pour tout $x \in I$ on a : $f(x) \geqslant g(x)$ **et si** :
   $$\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty \quad \text{alors} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Remarque : Énoncés analogues en $-\infty$ avec $I =]-\infty; b[$ et en un réel a avec I un intervalle ouvert contenant a.

Démonstration :

1) Théorème des gendarmes : en $+\infty$

   On sait que : $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \ell$

   D'après la définition des limites, tout intervalle ouvert J contenant ℓ, contient toutes les valeurs de $g(x)$ et $h(x)$ pour x assez grand.

   Comme $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$ il en est de même pour $f(x)$.

   Conclusion : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$

2) Théorème de comparaison : en $+\infty$

   D'après la définition des limites, tout intervalle ouvert $]M; +\infty[$, contient toutes les valeurs de $g(x)$ pour x assez grand.

   Comme $f(x) \geqslant g(x)$ il en est de même pour $f(x)$.

   Conclusion : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Exemples :

1) Déterminer la limite de $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ en $+\infty$

2) Déterminer la limite de $g(x) = x + \cos x$ en $+\infty$

✏ ✏

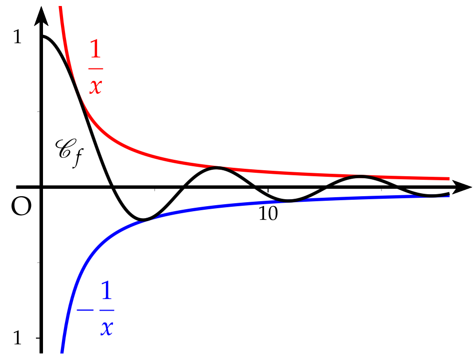
1) Pour tout x positif, on a :
$-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$, donc :

$$\forall x > 0 \quad -\frac{1}{x} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{x}$$

or on sait que :
$\lim\limits_{x \to +\infty} -\frac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$

D'après le théorème des Gendarmes, on a :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$



2) On a : $\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos x \geqslant -1$, donc :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x + \cos x \geqslant x - 1$$

or on sait que : $\lim\limits_{x \to +\infty} x - 1 = +\infty$, donc d'après le théorème de comparaison, on a :

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$$