La fonction exponentielle

Table des matières

Avant propos

Le but de ce chapitre est de construire une des fonctions mathématiques les plus importantes. Elle est en effet présente dans toutes les sciences. Sa construction à partir d'une équation différentielle est passionnante, bien qu'historiquement elle ne se soit pas construite ainsi.

1 La fonction exponentielle

1.1 Définition et théorèmes

Théorème 1 : Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$f' = f \quad \text{et} \quad f(0) = 1$$

On nomme cette fonction exponentielle et on la note : exp

ROC

Démonstration : L'existence de cette fonction est admise.
Démontrons l'unicité.

- **La fonction exponentielle ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.**

  Soit la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par : $\varphi(x) = f(x)f(-x)$.
  Montrons que la fonction φ est constante. Pour cela dérivons φ.

  $$\varphi'(x) = f'(x)f(-x) - f(x)f'(-x)$$

  Comme $f' = f$, on a :

  $$\begin{aligned} &= f(x)f(-x) - f(x)f(-x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

  Comme $\varphi' = 0$ alors la fonction φ est constante. Donc :

  $$\forall x \in \mathbb{R} \quad \varphi(x) = \varphi(0) = f^2(0) = 1$$

  On en déduit alors : $f(x)f(-x) = 1$, donc la fonction f ne peut s'annuler.

- **Unicité**

  On suppose que deux fonctions f et g vérifient les conditions du théorème, soit $f = f'$, $g' = g$ et $f(0) = g(0) = 1$. La fonction g ne s'annule donc pas, on définit alors sur $\mathbb{R}$ la fonction h par $h = \dfrac{f}{g}$. On dérive h :

  $$h' = \frac{f'g - fg'}{g^2} = \frac{fg - fg}{g^2} = 0$$

  La fonction h est donc constante et $h(x) = \dfrac{f(0)}{g(0)} = 1$

  On a donc : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1.$

  On en déduit que $f = g$. L'unicité est ainsi prouvée. Nous noterons dans la suite cette fonction exp.

1.2 Approche graphique de la fonction exponentielle

Algorithme : Déterminer un algorithme permettant de visualiser la fonction exponentielle à partir de sa définition sur l'intervalle $[-\alpha; \alpha]$.

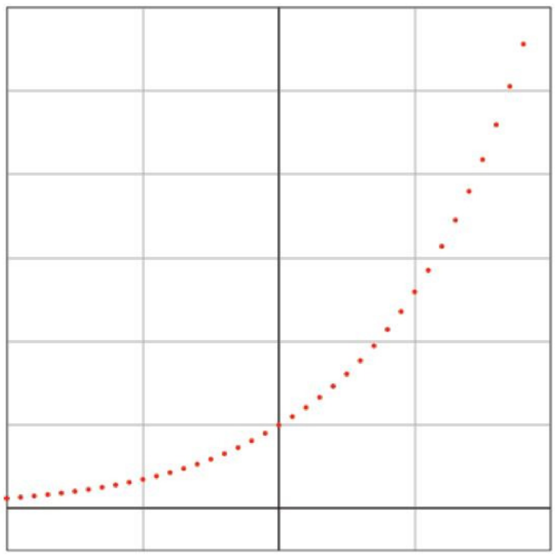
On fera une approche de la fonction exponentielle à l'aide d'une approximation affine : $f(a+h) \simeq f(a) + hf'(a)$. L'approximation sera d'autant meilleure que h sera petit

Comme la fonction exponentielle vérifie $f' = f$, cette approximation affine devient alors :

$$f(a+h) \simeq f(a) + hf(a) \simeq f(a)(1+h)$$

Pour cela on divise le segment unité des abscisses en N parties. On a alors $h = \dfrac{1}{N}$.
Pour initialiser la boucle, on partira du point A de coordonnées $(0;1)$ car $f(0) = 1$. On fera alors deux boucles pour déterminer les points situé à droite de A (on incrémente les abscisses de $1/N$) et les points situés à gauche de A (on incrémente les abscisses de $-1/N$).

On obtient la courbe suivante (à l'aide d'algobox) pour $N = 10$, $\alpha = 2$.



Variables : N, α, I entiers
X, Y réels
Entrées et initialisation
Lire N, α
$0 \to X$
$1 \to Y$
Effacer dessin
Tracer le point $(X;Y)$
Traitement
pour I de 1 à αN **faire**
$X + \dfrac{1}{N} \to X$
$Y\left(1 + \dfrac{1}{N}\right) \to Y$
Tracer le point $(X;Y)$
fin
$0 \to X$
$1 \to Y$
pour I de 1 à αN **faire**
$X - \dfrac{1}{N} \to X$
$Y\left(1 - \dfrac{1}{N}\right) \to Y$
Tracer le point $(X;Y)$
fin

1.3 Relation fonctionnelle

Théorème 2 : Soit a et b deux réels, on a alors :

$$\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$$

Remarque : Cette relation s'appelle la relation fonctionnelle car on pourrait définir l'exponentielle à partir de cette propriété pour retrouver que l'exponentielle est égale à sa dérivée.

Démonstration : Posons la fonction $h(x) = \dfrac{\exp(x+a)}{\exp(a)}$.
Montrons alors que la fonction h n'est autre que la fonction exponentielle. Il suffit alors de montrer que $h' = h$ et $h(0) = 1$:

$$h'(x) = \frac{\exp'(x+a)}{\exp(a)} = \frac{\exp(x+a)}{\exp(a)} = h(x)$$

$$h(0) = \frac{\exp(0+a)}{\exp(a)} = 1$$

La fonction h est donc la fonction exponentielle. On en déduit alors :

$$\frac{\exp(x+a)}{\exp(a)} = \exp(x) \quad \Leftrightarrow \quad \exp(x+a) = \exp(x) \times \exp(a)$$

1.4 Autres opérations

Théorème 3 : Soit a et b deux réels et n un entier naturel, on a alors les relations suivantes :
- $\exp(-a) = \dfrac{1}{\exp(a)}$
- $\exp(a-b) = \dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}$
- $\exp(na) = [\exp(a)]^n$

Démonstration : Les démonstrations sont immédiates. La première se montre à l'aide de la fonction φ du 1.1 et la dernière propriété se montre par récurrence.

1.5 Notation

Définition 1 : : Du fait des propriétés similaires entre la fonction exponentielle et la fonction puissance, on pose :
- $e = \exp(1) \quad e \simeq 2,718\ldots$
- $e^x = \exp(x)$

On a ainsi les propriétés :
- $e^{a+b} = e^a \times e^b$
- $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$
- $e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$
- $e^{na} = (e^a)^n$

2 Étude de la fonction exponentielle

2.1 Signe

Théorème 4 : La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$

Démonstration : On sait que $\exp(x) \neq 0$ pour tout réel. De plus la fonction exponentielle est continue car dérivable sur $\mathbb{R}$. S'il existait un réel a tel que $\exp(a) < 0$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existerait un réel α tel que $\exp(\alpha) = 0$ ce qui est impossible. La fonction exponentielle est donc strictement positive.

2.2 Variation

Théorème 5 : La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration : Immédiat du fait que sa dérivée est elle-même et que l'exponentielle est strictement positive.

Conséquence Comme la fonction exponentielle est strictement croissante, on peut écrire les équivalences suivante :

Règle 1 : Soit a et b deux réels, on a les équivalences suivantes :

$$e^a = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a = 0 \qquad\qquad e^a > 1 \quad \Leftrightarrow \quad a > 0$$

$$e^a = e^b \quad \Leftrightarrow \quad a = b \qquad\qquad e^a < e^b \quad \Leftrightarrow \quad a < b$$

Exemples :

- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $e^{2x^2+3} = e^{7x}$

  D'après les équivalences ci-dessus, l'équation est équivalente à :

  $$2x^2 + 3 = 7x \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 - 7x + 3 = 0$$

  On calcule : $\Delta = 49 - 24$ soit $\Delta = 25 = 5^2$, on obtient les deux solutions suivantes :

  $$x_1 = \frac{7+5}{4} = 3 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{7-5}{4} = \frac{1}{2} \quad \text{d'où} \quad S = \left\{\frac{1}{2}; 3\right\}$$

- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $e^{3x} \leqslant e^{x+6}$

  D'après les équivalences ci-dessus, l'équation est équivalente à :

  $$3x \leqslant x + 6 \quad \Leftrightarrow \quad 2x \leqslant 6 \quad \Leftrightarrow \quad x \leqslant 3 \quad \text{soit} \quad S =]-\infty; 3]$$

2.3 Limites

Théorème 6 : On a les limites suivantes :

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

ROC *Démonstration* : Soit la fonction f suivante : $f(x) = e^x - x$.

Dérivons la fonction f : $f'(x) = e^x - 1$

Comme la fonction exponentielle est strictement croissante, on a :

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0 \quad \text{et} \quad f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0$$

On obtient alors le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$	

Du tableau de variation on en déduit : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) > 0 \quad$ donc $\quad e^x > x$

or on sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$, par comparaison on a :

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$

En faisant le changement de variable $X = -x$, on obtient :

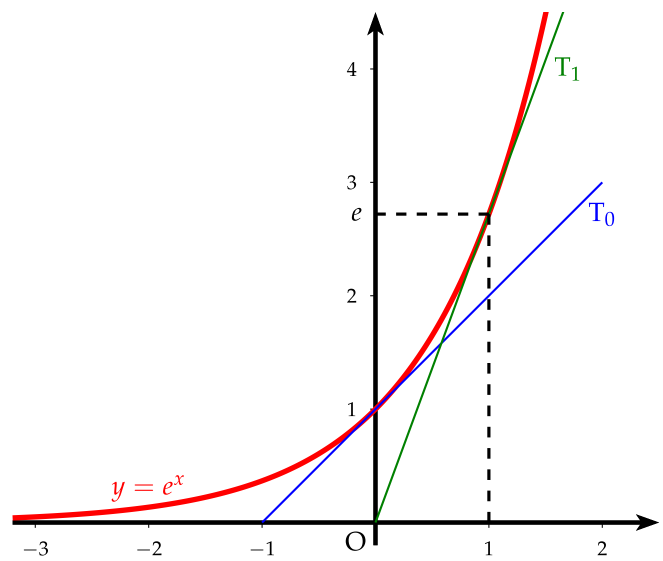
$$\lim_{x \to -\infty} e^x = \lim_{X \to +\infty} e^{-X} = \lim_{X \to +\infty} \frac{1}{e^X} = 0$$

2.4 Courbe représentative

D'après les renseignements obtenus, on a donc le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$\exp'(x)$		$+$		
$\exp(x)$	0 $\nearrow$	1 $\nearrow$	e $\nearrow$	$+\infty$

On obtient la courbe suivante :



2.5 Des limites de référence

Théorème 7 : On a : $$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Démonstration : La démonstration découle de la définition de la dérivée en 0 appliquée à la fonction e^x.

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^0}{x} = \exp'(0) = \exp(0) = 1$$

Théorème 8 : **Croissance comparée**

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} xe^x = 0$$

Démonstration : Comme pour la limite de e^x en $+\infty$, on étudie les variations d'une fonction. Soit donc la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$$

On calcule la dérivée g' : $g'(x) = e^x - x$

D'après le paragraphe 2.3, on a : $\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x > x \quad \text{donc} \quad g'(x) > 0$

La fonction g est donc croissante sur $\mathbb{R}$.
Or $g(0) = 1$ donc si $x > 0$ alors $g(x) > 0$. On en déduit donc que :

$$\text{Pour } x > 0 \quad g(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^x > \frac{x^2}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{e^x}{x} > \frac{x}{2}$$

On sait que $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{2} = +\infty$, par comparaison, on a :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

Pour la deuxième limite, on fait un changement de variable $X = -x$, on obtient alors :

$$\lim_{x \to -\infty} xe^x = \lim_{X \to +\infty} (-X)e^{-X} = -\lim_{X \to +\infty} \frac{X}{e^X} = 0$$

Conséquence : à l'infini, la fonction exponentielle « l'emporte » sur la fonction x.

2.6 Étude d'une fonction

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{2e^x - 3}{e^x + 1}$

1) Pourquoi les droites d et Δ d'équation respectives $y = 2$ et $y = -3$ sont-elles asymptotes à $\mathscr{C}_f$?

2) Calculer $f'(x)$ puis étudier les variations de f.
3) Tracer d, Δ et $\mathscr{C}_f$
4) La courbe semble avoir un point de symétrie. Démontrer cette conjecture.

1) On étudie les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
   a) En $+\infty$. On a une forme indéterminée, on change donc la forme de la fonction :
   $$f(x) = \frac{e^x\left(2 - \dfrac{3}{e^x}\right)}{e^x\left(1 + \dfrac{1}{e^x}\right)} = \frac{2 - \dfrac{3}{e^x}}{1 + \dfrac{1}{e^x}}$$
   On a : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{3}{e^x} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$

   Par quotient, on a donc : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$

   La courbe $\mathscr{C}_f$ admet donc une asymptote horizontale d en $+\infty$ d'équation $y = 2$.
   b) En $-\infty$, on a :
   $$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \text{ donc } \lim_{x\to-\infty} 2e^x - 3 = -3 \\ \displaystyle\lim_{x\to-\infty} e^x + 1 = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Par quotient, on a} \\ \displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = -3\end{array}$$
   La courbe $\mathscr{C}_f$ admet donc une asymptote horizontale Δ en $-\infty$ d'équation $y = -3$.

2) On calcule la dérivée :
   $$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2e^x(e^x+1) - e^x(2e^x - 3)}{(e^x+1)^2} \\ &= \frac{e^x(2x^x + 2 - 2e^x + 3)}{(e^x+1)^2} \\ &= \frac{5e^x}{(e^x+1)^2} \end{aligned}$$
   La fonction exponentielle étant strictement positive sur $\mathbb{R}$, la fonction f' est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

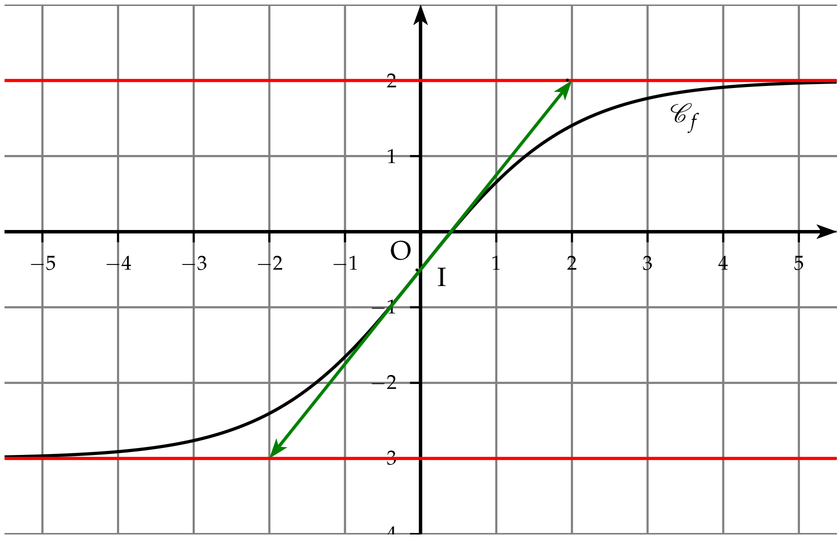
3) On a le tableau de variations de f suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	-3 $\nearrow$	2

4) Pour tracer la courbe $\mathscr{C}_f$, il est important de placer un point et sa tangente. Par exemple le point I d'abscisse nul. On a :

$$f(0) = -\frac{1}{2} \qquad f'(0) = \frac{5}{4}$$

On obtient la courbe suivante :



5) La courbe semble symétrique par rapport au point I. Pour le démontrer, prenons un nouveau repère centré en I. Un point $M(x, y)$ a pour coordonnées dans le nouveau repère $M(X, Y)$. On a alors :

$$\begin{cases} X = x \\ Y = y + \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = x \\ Y = f(x) + \dfrac{1}{2} = \dfrac{2e^X - 3}{e^X + 1} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{4e^X - 6 + e^X + 1}{2(e^X + 1)} = \dfrac{5(e^X - 1)}{2(e^X + 1)} \end{cases}$$

Montrons que la fonction $g(X) = \dfrac{5(e^X - 1)}{2(e^X + 1)}$ est impaire.

On a :

$$g(-X) = \frac{5(e^{-X} - 1)}{2(e^{-X} + 1)} = \frac{5(1 - e^X)}{2(1 + e^X)} = -g(X)$$

La fonction g est impaire, donc la courbe $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à I

3 Compléments sur la fonction exponentielle

3.1 Dérivée de la fonction e^u

Théorème 9 : Soit la fonction u définie et dérivable sur un ensemble $\mathcal{D}$, alors la fonction e^u est dérivable sur $\mathcal{D}$ et :

$$(e^u)' = u'e^u$$

3.2 Exemples types

3.2.1 Fonctions d'atténuation

Définition 2 : Soit un réel k **strictement positif**, on définit les fonctions f_k sur $\mathbb{R}$ par :

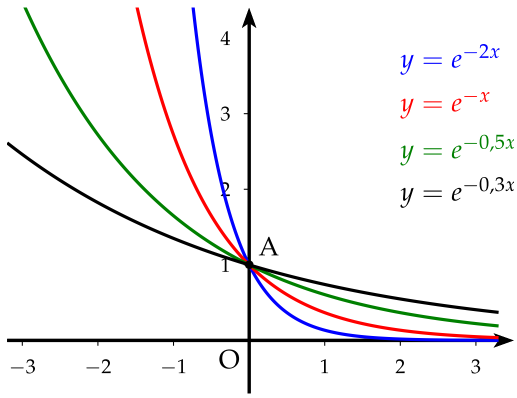
$$f_k(x) = e^{-kx}$$

Par composition, on a les limites : $\lim\limits_{x \to +\infty} f_k(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f_k(x) = +\infty$

On calcule la dérivée : $f'_k(x) = -ke^{-kx} < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

On obtient le tableau de variation :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$ 1 $\searrow$	0



Remarque : Plus le coefficient k est important plus l'atténuation est grande.

On retrouve très souvent ces fonctions en physique, par exemple :

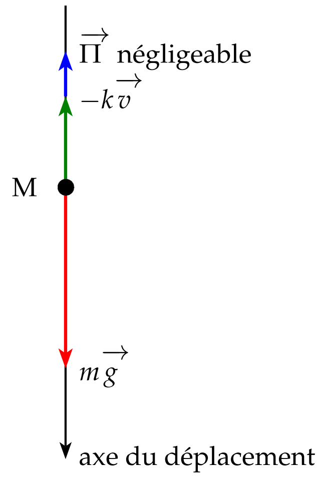
- avec la loi de désintégration radioactive où le nombre de noyaux en fonction du temps obéit à : $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$
- la décharge d'un condensateur dans un circuit RC où le courant obéit à : $i(t) = \dfrac{E}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$
- dans l'expression d'une force de frottement proportionnelle à la vitesse (chute libre dans l'air) que nous allons développer.

3.2.2 Chute d'un corps dans un fluide

On cherche à déterminer l'expression de la vitesse d'un corps dans l'air, c'est à dire dans notre environnement habituel. Lorsqu'on lache un corps M de masse m dans cet environnement, il est soumis à trois forces :

- son poids : $m\overrightarrow{g}$,
- une force de frottement : $-k\overrightarrow{v}$ qui s'oppose au mouvement et qui est proportionnelle à la vitesse
  Le coefficient k est déterminé par la forme du corps et de la compostion de l'atmosphère terrestre.
- la poussée d'Archimède : $\overrightarrow{\Pi}$ que l'on négligera en raison de sa faible influence.

On oriente l'axe du déplacement vers le bas



D'après le second principe de la dynamique on a :

$$m\overrightarrow{a} = \sum \overrightarrow{F_{\text{ext}}} = m\overrightarrow{g} - k\overrightarrow{v}$$

en projetant sur l'axe du mouvement et en remarquant que l'accélération est la dérivée de la vitesse, on obtient :

$$mv' = mg - kv \quad \Leftrightarrow \quad v' = g - \frac{k}{m}v \quad (1)$$

Cette équation (1) est une équation différentielle, au même titre que le problème de départ de notre chapitre (trouver une fonction qui vérifie $f' = f$). Les solutions $v(t)$ de cette équation différentielle sont de la forme :

$$v(t) = \lambda e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}$$

Comme la vitesse initiale $v(0) = 0$, on peut déterminer $\lambda = -\frac{mg}{k}$, ce qui donne pour l'expression de la vitesse :

$$v(t) = \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$$

Etude de la vitesse en fonction du temps : on détermine l'accélération en fonction du temps :

$$a(t) = v'(t) = \frac{mg}{k} \times \frac{k}{m}e^{-\frac{k}{m}t} = ge^{-\frac{k}{m}t} \quad \text{donc} \quad v'(t) > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}_+$$

Comme, on pouvait s'y attendre la vitesse est croissante. En effet un corps en chute libre voit sa vitesse augmenter.

Limite de la vitesse : $\lim\limits_{t\to+\infty} v(t) = \dfrac{mg}{k}$

En effet :
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{t\to+\infty} -\dfrac{k}{m}t = -\infty \\ \lim\limits_{t\to-\infty} e^{t} = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l}\text{Par composition} \\ \lim\limits_{t\to+\infty} e^{-\frac{k}{m}t} = 0\end{array}$$

On obtient le tableau de variation suivant :

t	0	$+\infty$
$a(t) = v'(t)$	$+$	
$v(t)$	0 $\nearrow$	$\dfrac{mg}{k}$

On constate alors que la vitesse d'un corps en chute libre dans l'air tend vers une vitesse limite : $v_{\text{lim}} = \dfrac{mg}{k}$

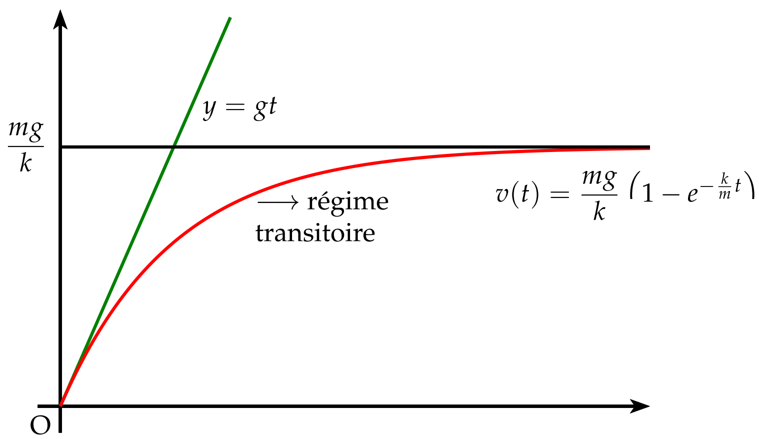
En effet, tout sportif ayant pratiqué "la chute libre" sait que la vitesse se stabilise au bout d'un certain temps. Elle atteint environ 200 km/h pour les jambes et les bras tendus. Si le coefficient m/k est très petit, comme pour une feuille d'arbre, la vitesse limite est particulièrement faible (1,8 km/h) ; ce qui permet à cette feuille de voltiger.

Tangente à la vitesse en 0. On a : $v'(0) = g$ et $v(0) = 0$. L'équation de la tangente en 0 est donc :

$$y = v'(0)t + v(0) \quad \text{donc} \quad y = gt$$

L'expression de la tangente en 0 correspond à l'expression de la vitesse de la chute libre dans le vide où le corps n'est soumis qu'à la pesanteur .

On obtient alors la représentation graphique de la vitesse en fonction du temps ainsi que la tangente en 0 suivante :



La vitesse augmente durant la période transitoire puis tend à se stabiliser vers sa vitesse limite.

Application numérique : On considère une balle de ping-pong de masse $m = 2,7$ g. Le coefficient de la force de frottement vaut $k = 5,4 \times 10^{-3}$ kg.s^{-1}. On prend $g = 9,80$ m.s^{-2}.

- Calculer la vitesse limite de cette balle de ping-pong en km/h
- Déterminer le temps nécessaire pour que la vitesse de la balle de pong-pong se situe à moins de 10^{-3} de sa vitesse limite en m/s

On obtient la vitesse limite : $v_{\lim} = \dfrac{mg}{k} = \dfrac{2,7 \times 10^{-3} \times 9,8}{5,4 \times 10^{-3}} = 4,9$ m/s soit $v_{\lim} = 4,9 \times 3,6 = 17,64$ km/h

On cherche ensuite le temps t pour que : $|v - v_{\lim}| < 10^{-3}$. On a alors :

$$\frac{mg}{k} e^{-\frac{k}{m}t} < 10^{-3} \quad \Leftrightarrow \quad 4,9\, e^{-2t} < 10^{-3} \quad \Leftrightarrow \quad e^{-2t} < \frac{10^{-3}}{4,9}$$

A l'aide d'un tableau de valeurs ou à l'aide de la fonction ln, on obtient : $t > -\dfrac{1}{2} \ln\left(\dfrac{10^{-3}}{4,9}\right) \quad \Leftrightarrow \quad t > 4,2$ s

Au bout de 4,2 s la vitesse de la balle s'est donc stabilisée à 17,64 km/h

3.2.3 Fonctions gaussiennes

Définition 3 : Soit un réel k **strictement positif**, on définit les fonctions g_k sur $\mathbb{R}$ par :

$$g_k(x) = e^{-kx^2}$$

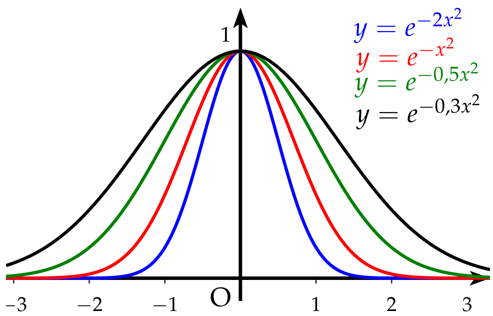
Par composition, on a les limites : $\lim\limits_{x \to +\infty} g_k(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} g_k(x) = 0$

On calcule la dérivée : $g'_k(x) = -2k\, x e^{-kx} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

La dérivée g'_k est donc du signe de $-x$

On obtient le tableau de variation :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'_k(x)$		$+$	0	$-$	
$g_k(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0



Remarque : Ces fonctions interviennent en probabilité avec la loi normale. La représentation de ces fonctions s'appelle des courbes en cloches.