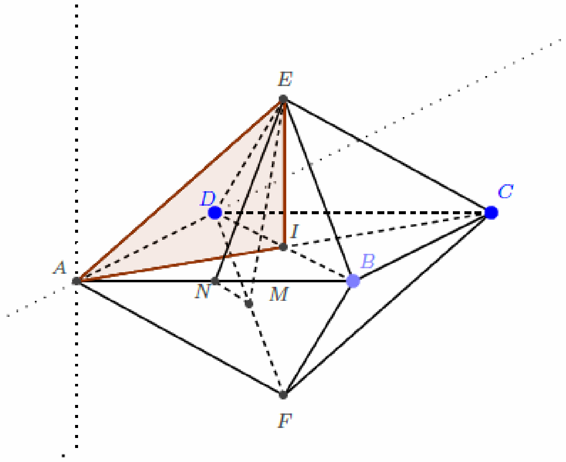
Correction – Bac S – Liban 2016

Exercice 1. Géométrie dans l'espace — 4 points

Commun à tous les candidats

On considère un solide ADECBF constitué de deux pyramides identiques ayant pour base commune le carré ABCD de centre I . Une représentation en perspective de ce solide est donnée en annexe (à rendre avec la copie).
Toutes les arêtes sont de longueur 1. L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AD}\,;\,\overrightarrow{AK}\right)$.



1.

1. a. Montrer que $IE = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$**. En déduire les coordonnées des points I , E et F.**

- Calcul de IE.
  Le triangle AEC est isocèle en E puisque toutes les arêtes sont de longueur 1, de fait la hauteur issue de E est aussi médiane et médiatrice et $AI = \dfrac{1}{2}AC$.
  La diagonale du carré $ABCD$ de côté 1 étant $\sqrt{2}$ (on applique Pythagore dans ABC isocèle rectangle en B) on a :

$$AE = 1\,;\; AI = \frac{1}{2}AC = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

  En outre le triangle AEI étant rectangle en I on a alors d'après le théorème de Pythagore :

$$IE^2 = AE^2 - AI^2 = 1^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

  Soit

$$\boxed{IE = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

- Coordonnées des points.
  Dans le repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AD}\,;\,\overrightarrow{AK}\right)$

$$A\,(0\,;\,0\,;\,0)\;;\;B\,(1\,;\,0\,;\,0)\;;\;D\,(0\,;\,1\,;\,0)\;;\;K\,(0\,;\,0\,;\,1)$$

  Et puisque $I = mil[BD]$:

$$\boxed{I\,(0,5\,;\,0,5\,;\,0)}$$

  On a vu que le triangle AEI étant rectangle et isocèle en I donc dans le repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AD}\,;\,\overrightarrow{AK}\right)$, le point E a les abscisses et ordonnées du point I et sa côte est $z_E = IE = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ soit :

$$\boxed{E\left(0,5\,;\,0,5\,;\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$$

  On déduit alors facilement les coordonnées du point F, symétrique du point E par rapport au point I soit :

$$\boxed{F\left(0,5\,;\,0,5\,;\,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$$

1. b. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}0\\-2\\\sqrt{2}\end{pmatrix}$ est normal au plan (ABE).

Donc d'après le théorème 1 on a donc :

$$\overrightarrow{n} \text{ normal à (ABE)} \Leftrightarrow \begin{cases}\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{AB}\\ \overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{AE}\end{cases}$$

Or dans le repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AD}\,;\,\overrightarrow{AK}\right)$

$$\left\{\begin{array}{l}A\,(0\,;\,0\,;\,0)\\ B\,(1\,;\,0\,;\,0)\\ E\left(0,5\,;\,0,5\,;\,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\end{array}\right. \left|\Longrightarrow \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}0,5\\0,5\\\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}\right.$$

Or

$$\begin{cases}\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AB} &= 0\times 1+(-2)\times 0+\sqrt{2}\times 0=0\\ \overrightarrow{n}.\overrightarrow{AE} &= 0\times 0,5+(-2)\times 0,5+\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{AB}\\ \overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{AE}\end{cases}$$

Le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}0\\-2\\\sqrt{2}\end{pmatrix}$ est donc bien orthogonal à deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$, non colinéaires du plan (ABE),

le vecteur $\underline{\overrightarrow{n} \text{ est normal au plan } (ABE)}$.

1. c. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABE).

Donc d'après la propriété 1, dans le repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AD}\,;\,\overrightarrow{AK}\right)$:

$$M(x\,;\,y\,;\,z)\in(ABE) \Longleftrightarrow \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-0\\y-0\\z-0\end{pmatrix}.\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}0\\-2\\\sqrt{2}\end{pmatrix}=0$$

$$M(x\,;\,y\,;\,z)\in(ABE) \Longleftrightarrow -2y+\sqrt{2}z=0$$

$$\boxed{(ABE)\ :\ -2y+\sqrt{2}z=0}$$

2. On nomme M le milieu du segment $[DF]$ et N celui du segment $[AB]$.

2. a. Démontrer que les plans (FDC) et (ABE) sont parallèles.

On va vérifier que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}0\\-2\\\sqrt{2}\end{pmatrix}$ est aussi normal au plan (FDC), en effet d'après le théorème 1 on a :

$$\overrightarrow{n} \text{ normal à (FDC)} \Leftrightarrow \begin{cases}\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{DF}\\ \overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{DC}\end{cases}$$

Or dans le repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AD}\,;\,\overrightarrow{AK}\right)$, $ABCD$ est un carré de côté 1 donc $C\,(1\,;\,1\,;\,0)$ soit

$$\left\{\begin{array}{l}C\,(1\,;\,1\,;\,0)\\ D\,(0\,;\,1\,;\,0)\\ F\left(0,5\,;\,0,5\,;\,-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\end{array}\right. \left|\Longrightarrow \overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}0,5\\-0,5\\-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right.$$

-

Or

$$\left\{\begin{array}{ll}\overrightarrow{n}.\overrightarrow{DF} & = 0\times 0,5 + (-2)\times(-0,5) + \sqrt{2}\times\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0 \\ \overrightarrow{n}.\overrightarrow{DC} & = 0\times 1 + (-2)\times 0 + \sqrt{2}\times 0 = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{DF} \\ \overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{DC}\end{array}\right.$$

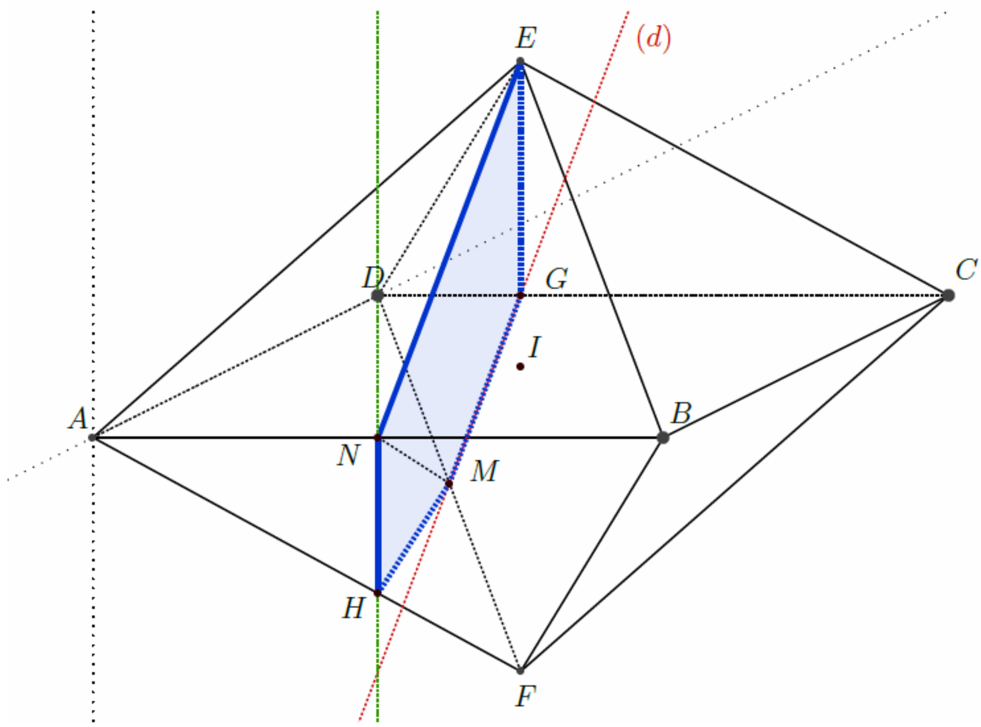
Le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}0\\-2\\\sqrt{2}\end{pmatrix}$ est donc normal au plan (FDC) et au plan (ABE) qui ne sont pas confondus, les plans (FDC) et (ABE) sont parallèles.

2. b. Déterminer l'intersection des plans (EMN) et (FDC).

- Le point M est le milieu du segment $[DF]$ donc il appartient aux deux plans les deux plans (EMN) et (FDC). Par conséquent, les plans non confondus (EMN) et (FDC) sont sécants en une droite passant par le point M.
- On a montré lors de la question **(2.a.)** que les plans (FDC) et (ABE) sont parallèles. Or on a :

  De ce fait d'après le théorème 2,- le plan (EMN) coupe les deux plans (FDC) et (ABE) en deux droites qui sont parallèles.
  Le plan (EMN) coupant le plan (AEB) en la droite (EN), il coupe le plan (FDC) en la parallèle à (EN) passant par le point M, la droite (MG) en rouge sur le schéma.

2. c. Construire sur l'annexe (à rendre avec la copie) la section du solide $ADECBF$ par le plan (EMN).
La section du solide $ADECBF$ par le plan (EMN) est ici représenté en bleu par le polygone $EGMHN$.



Exercice 2. Probabilités **4 points**

Commun à tous les candidats

Sur un court de tennis, un lance-balle permet à un joueur de s'entraîner seul. Cet appareil envoie des balles une par une à une cadence régulière. Le joueur frappe alors la balle puis la balle suivante arrive. Suivant le manuel, le lance-balle envoie au hasard la balle à droite ou à gauche avec la même probabilité. Dans tout l'exercice, on arrondira les résultats à 10^{-3} près.

Partie A

Le joueur s'apprête à recevoir une série de 20 balles.

1. Quelle est la probabilité que le lance-balle envoie 10 balles à droite ?

Suivant le manuel du constructeur, le lance-balle envoie au hasard la balle à droite ou à gauche avec la même probabilité soit $\dfrac{1}{2}$.
Notons X la v.a. qui compte le nombre de balles à droite.

- **Modélisation**
Vérifions les hypothèses de validation d'une *loi binomiale*.
  - Lancer une balle a *2 états* : elle est à droite ou il ne l'est pas (à gauche). La probabilité d'être à droite est : $p = 0,5$.
  - Il y a 20 « tirages ». Chaque tirage est *indépendant, identique* et *aléatoire*.

  De ce fait, la variable aléatoire X désigne bien le nombre de succès d'une répétition, de manière *indépendante*, de 20 *épreuves de Bernoulli* de paramètre $p = 0,5$.

  La variable X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,5$, notée $\mathscr{B}(20\,;\,0,5)$.

- **Calcul**
Puisque X suit une loi Binomiale de paramètre $n = 20$ et $p = 0,5$ on a :
$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{20}{k} \times 0,5^k \times (0,5)^{20-k} = \binom{20}{k} \times 0,5^{20}$$
La probabilité que le lance-balle envoie 10 balles à droite se traduit par $p(X = 10)$ or :
$$p(X = 10) = \binom{20}{10} \times 0,5^{10} \times (0,5)^{20-10}$$
$$p(X = 10) = 184\,756 \times 0,5^{20}$$
Donc à 10^{-3} près
$$\boxed{p(X = 10) \approx 0,176}$$
Remarque : Sur la TI Voyage 200
$$\text{TIStat.binomDdP}(20, 0.5, 10) \approx 0{,}176$$

- **Conclusion**
La probabilité que le lance-balle envoie 10 balles à droite est d'environ 0, 176.

2. Quelle est la probabilité que le lance-balle envoie entre 5 et 10 balles à droite ?
On cherche ici $p(5 \leq X \leq 10)$ soit :
$$\begin{aligned} p(5 \leq X \leq 10) &= p(X=5) + p(X=6) + p(X=7) + p(X=8) + p(X=9) + p(X=10) \\ &= \binom{20}{5} \times 0,5^{20} + \binom{20}{6} \times 0,5^{20} + \binom{20}{7} \times 0,5^{20} + \binom{20}{8} \times 0,5^{20} + \binom{20}{9} \times 0,5^{20} + \binom{20}{10} \times 0,5^{20} \\ &= \left[\binom{20}{5} + \binom{20}{6} + \binom{20}{7} + \binom{20}{8} + \binom{20}{9} + \binom{20}{10}\right] \times 0,5^{20} \\ &= 610\,473 \times 0,5^{20} \end{aligned}$$
Donc à 10^{-3} près
$$\boxed{p(5 \leq X \leq 10) \approx 0,582}$$
Remarque : Sur la TI Voyage 200
$$\text{TIStat.binomFdR}(20, 0.5, 10) - \text{TIStat.binomFdR}(20, 0.5, 4) \approx 0{,}582$$

Partie B

Le lance-balle est équipé d'un réservoir pouvant contenir 100 balles. Sur une séquence de 100 lancers, 42 balles ont été lancées à droite. Le joueur doute alors du bon fonctionnement de l'appareil. Ses doutes sont-ils justifiés ?

- **Analyse des données** :
  - « *Sur un échantillon de $n = 100$ balles lancées. Il est constaté que 42 d'entre elles le sont à droite.* ». Donc la fréquence observée de balles lancées à droite est
$$f = 42 \div 100 = 0{,}42 \text{ soit } \boxed{f = 0{,}42}$$
  - D'après le manuel du constructeur, le lance-balle envoie au hasard la balle à droite ou à gauche avec la même probabilité $p = 0,5$.
- **Intervalle de fluctuation** :

On a pour le cas étudié, $n = 100$, $p = 50\ \%$. Vérifions les conditions d'application du théorème :

$$\begin{cases} \checkmark & n = 100 \geq 30 \\ \checkmark & np = 100 \times 0{,}5 = 50 \geq 5 \\ \checkmark & n(1-p) = 100 \times 0{,}5 = 50 \geq 5 \end{cases}$$

Un intervalle fluctuation asymptotique au seuil de confiance de 95% est alors :

$$I_n = \left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \; ; \; p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] = \left[0{,}5 - 1,96\ \frac{\sqrt{0{,}5 \times 0{,}5}}{\sqrt{100}} \; ; \; 0{,}5 + 1,96\ \frac{\sqrt{0{,}5 \times 0{,}5}}{\sqrt{100}}\right]$$

Soit puisque les borne sont :

- $p - 1,96\ \dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0{,}402$. On arrondit la borne inférieure par défaut à 10^{-3} près soit $\underline{0{,}402}$.
- $p + 1,96\ \dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0{,}598$. On arrondit la borne supérieure par excès à 10^{-3} près soit $\underline{0{,}598}$.

$$\boxed{I_{100} \approx [0{,}402\ ;\ \ 0{,}598]}$$

- **Conclusion**
  La fréquence observée appartient à l'intervalle, $f = 0{,}42 \in I$ donc au risque d'erreur de 5%, l'appareil fonctionne correctement.

Partie C

Pour augmenter la difficulté le joueur paramètre le lance-balle de façon à donner un effet aux balles lancées. Elles peuvent être soit « liftées » soit « coupées ». La probabilité que le lance-balle envoie une balle à droite est toujours égale à la probabilité que le lance-balle envoie une balle à gauche. Les réglages de l'appareil permettent d'affirmer que :

- *la probabilité que le lance-balle envoie une balle liftée à droite est 0,24 ;*
- *la probabilité que le lance-balle envoie une balle coupée à gauche est 0,235.*

Si le lance-balle envoie une balle coupée, quelle est la probabilité qu'elle soit envoyée à droite ?
Notons D l'évènement « le lance-balle envoie une balle à droite », C l'évènement « le lance-balle envoie une balle coupée » et donc $\overline{C}$ l'évènement « le lance-balle envoie une balle liftée ».

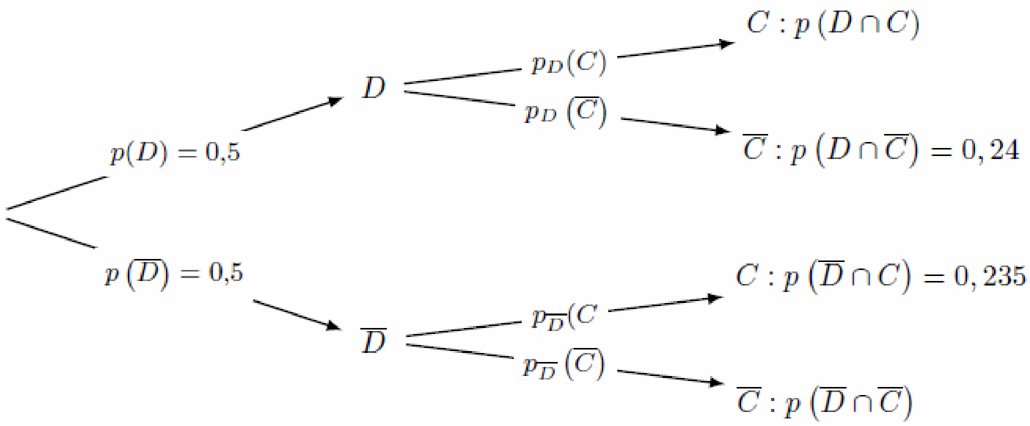
- Puisque « *La probabilité que le lance-balle envoie une balle à droite est toujours égale à la probabilité que le lance-balle envoie une balle à gauche* », alors $p\left(D\right) = p\left(\overline{D}\right) = 0,5$;
- Puisque « *la probabilité que le lance-balle envoie une balle liftée (et) à droite est 0,24* », alors on a la probabilité de l'évènement $\left(D \cap \overline{C}\right)$ (et pas du "sachant" attention) soit :

$$p\left(D \cap \overline{C}\right) = 0,24$$

- Puisque « *la probabilité que le lance-balle envoie une balle coupée (et) à gauche est 0,235* », alors :

$$p\left(\overline{D} \cap C\right) = 0,235$$

On a donc :



On cherche la probabilité que le lance-balle envoie une balle à droite, sachant qu'elle est coupée soit :

$$p_C(D) = \frac{p(C \cap D)}{p(C)}$$

- Calculons $p(D \cap C)$.
  On a :

$$p_D\left(\overline{C}\right) = \frac{p\left(D \cap \overline{C}\right)}{p(D)} = \frac{0,24}{0,5} = 0,48$$

  Par conséquent :

$$p_D(C) = 1 - p_D\left(\overline{C}\right) = 0,52$$

  De ce fait :

$$p(D \cap C) = p(D) \times p_D(C) = 0,5 \times 0,52 = \underline{0,26}$$

- Calculons $p(C)$.
  D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} p(C) &= p(D \cap C) + p\left(\overline{D} \cap C\right) \\ &= 0,26 + 0,235 = \underline{0,495} \end{aligned}$$

- En conclusion, à 10^{-3} près :

$$\boxed{p_C(D) = \frac{p(C \cap D)}{p(C)} = \frac{0,26}{0,495} \approx 0,525}$$

  Si le lance-balle envoie une balle coupée, la probabilité qu'elle soit envoyée à droite est d'environ $0,525$.

Exercice 3. Fonctions et suites — 4 points

Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 1]$ par $f(x) = \dfrac{1}{1 + \mathrm{e}^{1-x}}$.

Partie A

1. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 1]$.

- Calcul de la dérivée.

$$f : \left\{ \begin{array}{rcl} [0 ; 1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \dfrac{1}{1 + \mathrm{e}^{1-x}} \end{array} \right.$$

  La fonction f est dérivable sur $[0 ; 1]$ comme quotient de fonctions dérivables sur cet intervalle.
  La fonction f est de la forme $\dfrac{1}{v}$ donc de dérivée $\dfrac{-v'}{v^2}$ avec :

$$\forall x \in [0 ; 1] \ ; \ f(x) = \frac{1}{v(x)} \quad : \quad \left\{ \begin{array}{ll} v(x) & = 1 + \mathrm{e}^{1-x} \\ v'(x) & = (1-x)' \mathrm{e}^{1-x} = -\mathrm{e}^{1-x} \end{array} \right.$$

  On a donc :

$$\boxed{\forall x \in [0 ; 1], \ f'(x) = \frac{-v'(x)}{v(x)^2} = \frac{\mathrm{e}^{1-x}}{\left(1 + \mathrm{e}^{1-x}\right)^2}}$$

- Variations.
  Le numérateur de la dérivée est strictement positif donc elle est du signe du numérateur.
  La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$, donc elle l'est a fortiori sur $[0 ; 1]$ et le numérateur $\left(\mathrm{e}^{1-x}\right)$ est positif. On a donc

$$\forall x \in [0 ; 1] \ ; \ f'(x) > 0$$

  La fonction f est strictement croissante sur $[0 ; 1]$.

2. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,1]$, $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}}$.

En multipliant numérateur et dénominateur de $f(x)$ par e^{x} strictement positif sur $[0\,;\,1]$ on a :

$$f(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{1-x}} = \frac{\mathrm{e}^{x}}{(1+\mathrm{e}^{1-x})\times\mathrm{e}^{x}} = \frac{\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{1-x+x}}$$

Soit

$$\boxed{\forall x\in[0\,;\,1]\,;\ f(x) = \frac{\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}}}$$

3. Montrer alors que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \ln 2 + 1 - \ln(1+\mathrm{e})$.

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}}\,\mathrm{d}x$$

En notant pour $x\in[0\,;\,1]$, $u(x) = \mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}$, on a $u'(x) = \mathrm{e}^{x}$ et

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{u'(x)}{u(x)}\,\mathrm{d}x$$

Or pour u ne s'annulant pas, une primitive de $\dfrac{u'}{u}$ est $\ln|u|$ donc :

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x &= [\ln|u|]_0^1 = \ln\left(\mathrm{e}^{1}+\mathrm{e}\right) - \ln\left(\mathrm{e}^{0}+\mathrm{e}\right)\\ &= \ln(2\mathrm{e}) - \ln(1+\mathrm{e})\end{aligned}$$

On applique alors la propriété $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ valable pour a et b strictement positifs

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \ln 2 + \underbrace{\ln\mathrm{e}}_{1} - \ln(1+\mathrm{e})$$

Soit

$$\boxed{\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \ln 2 + 1 - \ln(1+\mathrm{e})}$$

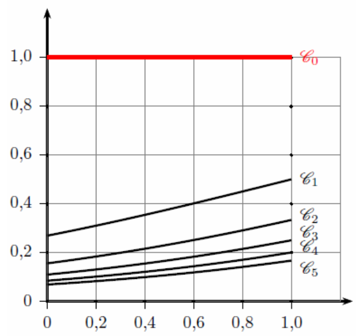
Partie B

Soit n un entier naturel. On considère les fonctions f_n définies sur $[0\,;\,1]$ par $f_n(x) = \dfrac{1}{1+n\,e^{1-x}}$.
On note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n dans le plan muni d'un repère orthonormé. On considère la suite de terme général $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx$.

1. On a tracé en annexe les courbes représentatives des fonctions f_n pour n variant de 1 à 5. Compléter le graphique en traçant la courbe $\mathscr{C}_0$ représentative de la fonction f_0.

On va donc construire sur le graphique en rouge, la courbe $\mathscr{C}_0$, représentative de la fonction constante f_0 avec :

$$f_0 : \left\{\begin{array}{rcl}[0\,;\,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & f_0(x) = \dfrac{1}{1+0\times\mathrm{e}^{1-x}} = 1\end{array}\right.$$



2. Soit n un entier naturel, interpréter graphiquement u_n et préciser la valeur de u_0.

$$f_n : \begin{cases} [0\,;\,1] & \longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ \quad x & \longmapsto \quad f_n(x) = \dfrac{1}{1+n\,\mathrm{e}^{\,1-x}} \end{cases}$$

- Interprétation graphique.
Puisque pour tout entier naturel n et tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,1]$:

$$1+n\,\mathrm{e}^{\,1-x} > 0$$

Les fonctions f_n sont toutes strictement positives sur $[0\,;\,1]$.
De ce fait, $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$ correspond à l'aire du domaine (en unités d'aire) compris entre la courbe $\mathscr{C}_n$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.

- Calcul de u_0.
La courbe $\mathscr{C}_0$ est le segment d'extrémités les points de coordonnées $(0\,;\,1)$ et $(1\,;\,1)$. Donc l'aire correspondante à u_0 est celle d'un carré de côté 1 soit

$$\boxed{u_0 = 1\ u.a.}$$

3. Quelle conjecture peut-on émettre quant au sens de variation de la suite (u_n) ? Démontrer cette conjecture.

- Conjecture.
La suite (u_n) semble être décroissante.
- Preuve de la conjecture.
Pour tout entier naturel n on a :

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 f_{n+1}(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 f_{n+1}(x)\,\mathrm{d}x$$

Par linéarité de l'intégrale on obtient

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \int_0^1 \left(f_{n+1}(x) - f_n(x)\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{1+(n+1)\,\mathrm{e}^{\,1-x}} - \frac{1}{1+n\,\mathrm{e}^{\,1-x}}\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \left(\frac{\left(1+n\,\mathrm{e}^{\,1-x}\right) - \left(1+(n+1)\,\mathrm{e}^{\,1-x}\right)}{\left(1+(n+1)\,\mathrm{e}^{\,1-x}\right)\times\left(1+n\,\mathrm{e}^{\,1-x}\right)}\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1+n\,\mathrm{e}^{\,1-x} - 1 - (n+1)\,\mathrm{e}^{\,1-x}}{\left(1+(n+1)\,\mathrm{e}^{\,1-x}\right)\times\left(1+n\,\mathrm{e}^{\,1-x}\right)}\right)\mathrm{d}x \\ u_{n+1} - u_n &= \int_0^1 \left(\frac{-\,\mathrm{e}^{\,1-x}}{\left(1+(n+1)\,\mathrm{e}^{\,1-x}\right)\times\left(1+n\,\mathrm{e}^{\,1-x}\right)}\right)\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Or l'exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc pour tout entier naturel n et tout réel $x \in [0\,;\,1]$, le dénominateur de l'intégrande est strictement positif :

$$\left(1+(n+1)\,\mathrm{e}^{\,1-x}\right)\times\left(1+n\,\mathrm{e}^{\,1-x}\right) > 0$$

Pour la même raison le numérateur de l'intégrande est strictement négatif :

$$-\,\mathrm{e}^{\,1-x} < 0$$

De ce fait, pour tout entier naturel n et tout réel $x \in [0\,;\,1]$ l'intégrande est négatif :

$$\left(\frac{-\,\mathrm{e}^{\,1-x}}{\left(1+(n+1)\,\mathrm{e}^{\,1-x}\right)\times\left(1+n\,\mathrm{e}^{\,1-x}\right)}\right) < 0$$

La propriété dite de *positivité de l'intégrale* permet alors de conclure :

$$\forall n \in \mathbb{N}\,;\ u_{n+1} - u_n = \int_0^1 \left(\frac{-\,\mathrm{e}^{\,1-x}}{\left(1+(n+1)\,\mathrm{e}^{\,1-x}\right)\times\left(1+n\,\mathrm{e}^{\,1-x}\right)}\right)\mathrm{d}x < 0$$

La suite (u_n) est bien décroissante.

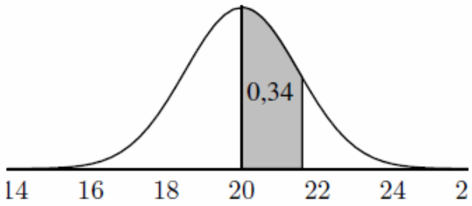
4. La suite (u_n) admet-elle une limite ?

- Pour tout n, on a montré lors de la question **(B.2.)** que $u_n > 0$ comme intégrale d'une fonction continue strictement positive sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$.
- On vient de prouver lors de la question **(B.3.)** que suite (u_n) est décroissante.
- La suite (u_n) est donc décroissante et minorée par 0. Elle est par conséquent convergente et possède ainsi une limite L telle que $L \geq 0$.

Exercice 4. Obligatoire - Vrai/Faux — 5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

- Sur le schéma ci-dessous on a représenté la courbe de densité d'une variable aléatoire X qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 20$. La probabilité que la variable aléatoire X soit comprise entre 20 et $21,6$ est égale à $0,34$.



Preuve.

- Approximation de σ.

  D'après le graphique on a
$$p\,(20 \leq X \leq 21,6) = p\,(20 \leq X \leq 20 + 1,6) = 0,34$$
  Et donc par symétrie
$$p\,(18,4 = 20 - 1,6 \leq X \leq 20) = p\,(20 \leq X \leq 20 + 1,6) = 0,34$$
  Soit
$$p\,(18,4 = 20 - 1,6 \leq X \leq 20 + 1,6 = 21,6) = 0,68$$
  On va appliquer la propriété des intervalles dite :

  Donc
$$\left.\begin{array}{|ll} p\,(20 - \ \sigma \leq X \leq 20 + \ \sigma) \approx 0,683 & \text{: d'après la propriété (1)} \\ p\,(20 - 1,6 \leq X \leq 20 + 1,6) = 0,68 & \text{: d'après le calcul précédent} \end{array}\right\} \underset{\text{par identification}}{\Longrightarrow} \underline{\sigma \approx 1,6}$$

- Calcul.

Donc ici
$$\boxed{p\,(X > 23,2) = 0,5 - p\,(20 < X < 23,2) \approx 0,023}$$
Donc l'affirmation 1 est fausse.

- Soit z un nombre complexe différent de 2. On pose : $Z = \dfrac{\mathrm{i}z}{z-2}$.

Preuve.
Notons M le point du plan d'affixe z, B celui d'affixe 0 et C celui d'affixe 2. On a alors pour $z \neq 2$:
$$|Z| = 1 \Longleftrightarrow \left|\frac{\mathrm{i}z}{z-2}\right| = 1$$
$$|Z| = 1 \Longleftrightarrow |\mathrm{i}z| = |z-2|$$
$$|Z| = 1 \Longleftrightarrow |z| = |z-2|$$
$$|Z| = 1 \Longleftrightarrow BM = CM$$
L'ensemble cherché est donc la médiatrice du segment $[BC]$, droite qui passe par le milieu $A(1\ ;\ 0)$ du segment $[BC]$.
Donc l'affirmation 2 est vraie.

Preuve.

- Si $z \neq 2$

  On a pour $z \neq 2$ et x, y des réels tels que $z = x + \mathrm{i}\,y$:
$$Z = \frac{\mathrm{i}z}{z-2}$$
$$Z = \frac{\mathrm{i}(x+\mathrm{i}y)}{x+\mathrm{i}y-2} = \frac{(\mathrm{i}\,x - y)}{(x-2)+\mathrm{i}y}$$

On multiplie alors numérateur et dénominateur par l'expression conjuguée $((x-2)-\mathrm{i}y)$

$$\begin{aligned}
Z &= \frac{(\mathrm{i}x-y)(x-2-\mathrm{i}y)}{((x-2)+\mathrm{i}y)\,((x-2)-\mathrm{i}y)}\\
Z &= \frac{\mathrm{i}\,x^2-2\,\mathrm{i}\,x+xy-yx+2y+\mathrm{i}\,y^2}{(x-2)^2+y^2}\\
Z &= \frac{2y+\mathrm{i}\,(x^2-2x+y^2)}{(x-2)^2+y^2}\\
Z &= \frac{2y}{(x-2)^2+y^2}+\mathrm{i}\,\frac{(x^2-2x+y^2)}{(x-2)^2+y^2}
\end{aligned}$$

Or Z est un imaginaire pur si et seulement si $\mathcal{R}e(Z)=0$ soit

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}e(Z)=0 &\iff \frac{2y}{(x-2)^2+y^2}=0\\
\mathcal{R}e(Z)=0 &\iff 2y=0\\
\mathcal{R}e(Z)=0 &\iff y=0 \iff z\in\mathbb{R}\setminus\{2\}
\end{aligned}$$

- Attention, si $z=2\in\mathbb{R}$, alors Z n'est pas défini et n'est donc à fortiori pas imaginaire. Le cas est exclu dans le sujet mais il faudrait le préciser en toute rigueur.
- Conclusion.
  Donc Z est un imaginaire pur si et seulement si z est réel différent de 2. L'affirmation 3 est donc fausse ou vraie si z différent de 2.

  Remarque : dans le sujet, il est précisé dès le départ que z est différent de 2, on pouvait donc considérer que l'affirmation était vraie, sous réserve, nul doute que les correcteurs ne sanctionneront pas ce détail.

- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{3}{4+6\mathrm{e}^{-2x}}$.

Preuve.

$$\begin{aligned}
f(x)=0,5 &\iff \frac{3}{4+6\mathrm{e}^{-2x}}=0,5\\
f(x)=0,5 &\iff 3=0,5\times\left(4+6\mathrm{e}^{-2x}\right)\\
f(x)=0,5 &\iff 3=2+3\mathrm{e}^{-2x}\\
f(x)=0,5 &\iff \mathrm{e}^{-2x}=\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

On compose alors par la fonction ln définie sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned}
f(x)=0,5 &\iff -2x=\ln\frac{1}{3}=-\ln 3\\
f(x)=0,5 &\iff x=\frac{\ln 3}{2}
\end{aligned}$$

L'équation $f(x)=0,5$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$. L'affirmation 4 est vraie.

Preuve.
L'algorithme calcule les valeurs de f en partant de $x=0$ et avec un pas de $0,01$. Il affiche alors la première valeur de $f(x)$ supérieure ou égale à $0,5$.
Or on a :

$$f(0,54)\approx 0,497 \text{ et } f(0,55)\approx 0,500\,2$$

L'algorithme va afficher 0,55. L'affirmation 5 est fausse.

Variables :	X et Y sont des réels
Initialisation :	X prend la valeur 0
	Y prend la valeur $\frac{3}{10}$
Traitement :	Tant que $Y<0,5$
	X prend la valeur $X+0,01$
	Y prend la valeur $\frac{3}{4+6\mathrm{e}^{-2X}}$
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher X

Exercice 5. Complexes et suites — 3 points

Commun à tous les candidats

On considère la suite (z_n) de nombres complexes définie pour tout entier naturel n par : $\begin{cases} z_0 &= 0 \\ z_{n+1} &= \frac{1}{2}i \times z_n + 5 \end{cases}$.

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on note M_n le point d'affixe z_n. On considère le nombre complexe $z_A = 4 + 2i$ et A le point du plan d'affixe z_A.

1. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = z_n - z_A$.

1. a. Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{2}i \times u_n$.

Pour tout entier naturel n on a :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= z_{n+1} - z_A \\
u_{n+1} &= \frac{1}{2}i \times z_n + 5 - 4 - 2i \\
u_{n+1} &= \frac{1}{2}i \times z_n + 1 - 2i \\
u_{n+1} &= \frac{1}{2}i\,(z_n - 2i - 4) \\
u_{n+1} &= \frac{1}{2}i \left(z_n - \underbrace{(4+2i)}_{z_A}\right) \\
u_{n+1} &= \frac{1}{2}i \times \underbrace{(z_n - z_A)}_{u_n}
\end{aligned}$$

Pour tout entier naturel n on a

$$\boxed{u_{n+1} = \frac{1}{2}i \times u_n}$$

1. b. Démontrer que, pour tout entier naturel n : $u_n = \left(\frac{1}{2}i\right)^n (-4-2i)$.

Notons pour tout entier naturel $n \geq 0$ le postulat

$$(P_n)\ :\ u_n = \left(\frac{1}{2}i\right)^n (-4-2i)$$

- **Initialisation**
  Pour $n = 0$, le postulat (P_0) est vrai puisque :

$$\left\{\begin{array}{l} \left(\frac{1}{2}i\right)^0 (-4-2i) = (-4-2i) \\ u_0 = z_0 - z_A = -z_A = (-4-2i) \end{array}\right| \Longrightarrow u_0 = \left(\frac{1}{2}i\right)^0 (-4-2i)$$

- **Hérédité**
  Supposons que pour n entier fixé, (P_n) soit vérifié et montrons qu'alors il est aussi vrai au rang $n+1$.
  - On a montré lors de la question (1.a.) que pour tout entier n :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}i \times u_n$$

  - On applique alors l'hypothèse de récurrence qui implique que : (P_n) soit vérifié et donc que

$$u_n = \left(\frac{1}{2}i\right)^n (-4-2i)$$

– Alors

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\mathrm{i} \times u_n$$
$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\mathrm{i} \times \left(\left(\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)^n (-4-2\mathrm{i})\right)$$
$$u_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)^{n+1} (-4-2\mathrm{i})$$

– On a alors montré que $u_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)^{n+1} (-4-2\mathrm{i})$ et donc que (P_{n+1}) est vrai.

- **Conclusion**
On a montré que (P_0) est vrai. De plus, si l'on suppose le postulat (P_n) vérifié, alors il l'est aussi au rang suivant, (P_{n+1}) est vrai. De ce fait la relation est vrai pour tout entier $n \geq 0$.

$$\boxed{u_n = \left(\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)^n (-4-2\mathrm{i})}$$

2. Démontrer que, pour tout entier naturel n, les points A, M_n et M_{n+4} sont alignés.
Pour tout entier naturel n :

$$u_{n+4} = \left(\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)^{n+4} (-4-2\mathrm{i})$$
$$u_{n+4} = \left(\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)^{n} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{4} \times (-4-2\mathrm{i})$$
$$u_{n+4} = \left(\frac{1}{2}\right)^{4} \times \underbrace{\left(\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)^{n} \times (-4-2\mathrm{i})}_{u_n}$$

Soit

$$(R_1) \quad : \quad \boxed{u_{n+4} = \frac{1}{2^4} \times u_n}$$

Or

$$\left\{\begin{array}{l} A\,(z_A) = A\,(4+2\,\mathrm{i}\,) \\ M_n\,(z_n) \\ M_{n+4}\,(z_{n+4}) \end{array}\right. \Bigg| \Longrightarrow \overrightarrow{AM_n}\left(\underbrace{z_n - z_A}_{u_n}\right) \text{ et } \overrightarrow{AM_{n+4}}\left(\underbrace{z_{n+4} - z_A}_{u_{n+4}}\right)$$

Les complexes u_{n+4} et u_{n+4} sont donc les affixes respectives des vecteurs $\overrightarrow{AM_{n+4}}$ et $\overrightarrow{AM_n}$ donc d'après la relation (R_1).

$$\overrightarrow{AM_{n+4}} = \frac{1}{2^4}\,\overrightarrow{AM_n}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AM_{n+4}}$ et $\overrightarrow{AM_n}$ sont donc colinéaires et <u>les points A, M_n et M_{n+4} sont alignés</u>.

- Fin du devoir -