

Ex 1 : Récurrence - (*) - 2 pts

Démontrer, par récurrence, la propriété :

$$P_n : \forall n \in \mathbb{N}, 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Ex 2 : Étude de suites - ()- 5 pts**

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 8$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$ pour $n \geq 1$

- 1) Donner les conjectures relatives à cette suite (u_n) (variations, minorant, majorant, convergence, limite)
- 2) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N} : 1 < u_n \leq 8$
- 3) Étudier le sens de variation de la suite (u_n)
- 4) Montrer que (u_n) est convergente et calculer sa limite

Ex 3 : Limites de suites - (*) - 4 pts

Calculer la limite (éventuelle) des suites suivantes :

$$\begin{array}{lll} \text{a) } u_n = 2 \left(\frac{5}{2} \right)^n - \frac{4}{3^n} & \text{b) } u_n = \frac{1}{1 + \sqrt{n}} & \text{c) } u_n = \frac{n^2}{1 + n^2} \\ \text{d) } u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} & \text{e) } u_n = \frac{(n+1)(3-n)}{2n^2+1} & \text{f) } u_n = n^2 + (-1)^n \cdot n \end{array}$$

Ex 4 : Étude de suites - ()- 5 pts**

On considère la fonction f définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = \frac{3x+2}{x+4}$

La suite (u_n) est définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 = 0$

- 1) a) Donner les conjectures relatives à cette suite (u_n) (variations, minorant, majorant, convergence, limite)
b) Étudier le sens de variation de f sur $[0; 1]$
- 2) a) Montrer que la suite (u_n) est croissante
b) Montrer que la suite (u_n) est bornée
c) Que peut-on en déduire ?
- 3) Calculer la limite de la suite (u_n)

Ex 5 : Étude de fonctions - ()- 4 pts**

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{3}{4}x^4 + x^3 - 3x^2$

On note C_f la courbe représentative de la fonction f

- 1) a) Donner l'intervalle de dérivabilité de f
b) Calculer la dérivée $f'(x)$
c) Étudier le signe de $f'(x)$
d) En déduire le tableau de variation de f
- 2) a) Déterminer l'équation de la tangente (d) à C_f au point A d'abscisse -1
b) Construire cette tangente (d) sur le graphique ci-dessous
c) Compléter le graphique C_f avec ses éléments caractéristiques

