Ex 1 : $P_n : \forall n \in \mathbb{N},\ 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Initialisation : $1^2=1$ et $\dfrac{1(1+1)(2+1)}{6}=1$ donc P_1 est vraie

Hérédité : on suppose qu'il existe un entier n tel que P_n soit vraie

donc $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

donc $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2+(n+1)^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2$

donc $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2+(n+1)^2=(n+1)\left(\dfrac{n(2n+1)}{6}+(n+1)\right)$

donc $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2+(n+1)^2=(n+1)\left(\dfrac{2n^2+7n+6}{6}\right)$

donc $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2+(n+1)^2=(n+1)\left(\dfrac{(n+2)(2n+3)}{6}\right)$

donc $1^2+2^2+3^2+\cdots+(n+1)^2=\dfrac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$ donc P_{n+1} est vraie

Conclusion : $P_n : \forall n \in \mathbb{N},\ 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Ex 2 : On considère la suite (u_n) définie par $u_0=8$; $u_{n+1}=\sqrt{u_n+1}$, $n\geqslant 1$

Conjectures : la suite (u_n) est minorée par 1, majorée par 8, décroissante et convergente vers ϕ (nombre d'or)

On pose : $P_n : \forall n \in \mathbb{N} :\ 1<u_n\leqslant 8$ Montrons par récurrence cette propriété
Initalisation : $u_0=8$ donc $1<u_0\leqslant 8$ donc P_0 est vraie
Hérédité : on suppose qu'il existe un entier n tel que P_n soit vraie
donc $1<u_n\leqslant 8$ donc $2<u_n+1\leqslant 9$ donc $1<\sqrt{2}<\sqrt{u_n+1}\leqslant 3\leqslant 8$
donc $1<u_{n+1}\leqslant 8$ donc P_{n+1} est vraie
Conclusion : la suite (u_n) est minorée par et majorée par 8

soit $n\in\mathbb{N}$ alors $u_{n+1}-u_n=\sqrt{u_n+1}-u_n=\dfrac{u_n+1-u_n^2}{\sqrt{u_n+1}+u_n}=\dfrac{-u_n^2+u_n+1}{\sqrt{u_n+1}+u_n}$

or le trinôme $-x^2+x+1$ est positif si $0\leqslant x\leqslant 1$ et il est négatif si $x\geqslant 2$
donc la suite (u_n) est décroissante pour $n\geqslant 2$

Ainsi, la suite (u_n) est décroissante et monorée par 1
donc elle est convergente vers L
d'après le th du pt fixe L vérifie $L=\sqrt{L+1}$

donc $L^2=L+1$ donc $L^2-L-1=0$ donc $L=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ ou $L=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

or $1<L\leqslant 8$ donc $L=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (nombre d'or)

Ex 3 : Calculer la limite (éventuelle) des suites suivantes :

a) $u_n=2\left(\dfrac{5}{2}\right)^n-\dfrac{4}{3^n}=2\left(\dfrac{5}{2}\right)^n-4\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$; $\dfrac{5}{2}>1$ donc $\lim\limits_{+\infty} 2\left(\dfrac{5}{2}\right)^n=+\infty$

et $-1<\dfrac{1}{3}<1$ donc $\lim\limits_{+\infty} 4\left(\dfrac{1}{3}\right)^n=0$ ainsi par somme $\lim\limits_{+\infty} u_n=+\infty$

b) $u_n=\dfrac{1}{1+\sqrt{n}}$ $\lim\limits_{+\infty}(1+\sqrt{n})=+\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} 1=1$
donc par quotient $\lim\limits_{+\infty} u_n=0$

c) $u_n=\dfrac{n^2}{1+n^2}=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{n^2}}$ or $\lim\limits_{+\infty}\dfrac{1}{n^2}=0$ donc $\lim\limits_{+\infty} u_n=1$ par opérations

d) $u_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\dfrac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\dfrac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

or $\lim\limits_{+\infty}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})=+\infty$ donc $\lim\limits_{+\infty} u_n=0$

e) $u_n=\dfrac{(n+1)(3-n)}{2n^2+1}=\dfrac{-n^2+2n-3}{2n^2+1}=\dfrac{-1+\dfrac{2}{n}-\dfrac{3}{n^2}}{2+\dfrac{1}{n^2}}$

or $\lim\limits_{+\infty}\left(-1+\dfrac{2}{n}+\dfrac{3}{n^2}\right)=-1$ et $\lim\limits_{+\infty}\left(2+\dfrac{1}{n^2}\right)=2$ donc $\lim\limits_{+\infty} u_n=\dfrac{-1}{2}$

f) $u_n=n^2+(-1)^n.n$ on sait que -1 leslant (-1)^n leslant 1
donc -n leslant n.(-1)^n leslant n donc n^2-n leslant u_n leslant n^2+n

or $\lim\limits_{+\infty}(n^2-n)=\lim\limits_{+\infty}\left(n^2\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\right)=+\infty$ et $u_n\geqslant n^2-n$

d'après un th de comparaison : $\lim\limits_{+\infty} u_n=+\infty$

Ex 4 : On considère la fonction f définie sur $[0;1]$ par $f(x)=\dfrac{3x+2}{x+4}$

La suite (u_n) est définie par $u_{n+1}=f(u_n)$ et $u_0=0$

Conjectures : la suite (u_n) est minorée par 0, majorée par 1, croissante et convergente vers 1

on a : $f'(x)=\dfrac{10}{(x+4)^2}$ donc $f'(x)>0$ donc f est croissante sur $[0;1]$

on pose $P_n : \forall n\in\mathbb{N} : u_{n+1}\geqslant u_n$ Montrons par récurrence cette propriété

Initialisation : $u_0=0$ et $u_1=0{,}5$ donc $u_1>u_0$ donc P_0 est vraie
Hérédité : on suppose qu'il existe un entier n tel que P_n soit vraie
donc $u_{n+1}\geqslant u_n$ donc $f(u_{n+1})\geqslant f(u_n)$ car f est croissante
donc $u_{n+2}\geqslant u_{n+1}$ donc P_{n+1} est vraie

Conclusion : la suite (u_n) est croissante pour $n\geqslant 0$

on pose $P_n : \forall n\in\mathbb{N} : 0\leqslant u_n\leqslant 1$ Montrons par récurrence cette propriété

Initialisation : $u_0=0$ donc $0\leqslant u_0\leqslant 1$ donc P_0 est vraie
Hérédité : on suppose qu'il existe un entier n tel que P_n soit vraie
donc $0\leqslant u_n\leqslant 1$ donc $f(0)\leqslant f(u_n)\leqslant f(1)$ car f est croissante
donc $0<0{,}5\leqslant u_{n+1}\leqslant 1$ donc P_{n+1} est vraie

Conclusion : la suite (u_n) est bornée par 0 et 1

Ainsi la suite (u_n) est croissante et majorée par 1 donc elle est convergente vers L ; de plus d'après le th du pt fixe L vérifie $L=\dfrac{3L+2}{L+4}$
donc $L^2+L-2=0$ donc $L=1$ ou $L=-2$ or $0\leqslant L\leqslant 1$ donc $L=1$

Ex 5 : la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{3}{4}x^4+x^3-3x^2$

On note C_f la courbe représentative de la fonction f
f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$
car f ne possède aucune "valeur interdite"
et $f'(x)=3x^3+3x^2-6x=(3x)(x^2+x-2)=(3x)(x-1)(x+2)$

le tableau de signes de $f'(x)$ est donné ci-contre :

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
$3x$		$-$	-6	$-$	0	$+$	3	$+$	
$x-1$		$-$	-3	$-$	-1	$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$	2	$+$	3	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
signe de f'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	↘	-8	↗	0	↘	-1,25	↗	$+\infty$

La tangente (d) à C_f au point A d'abscisse -1 a pour équation :
$y=f'(-1)(x+1)+f(-1)$ avec $f'(-1)=6$ et $f(-1)=-3{,}25$
donc on obtient $y=6(x+1)-3{,}25$ soit $(d) : y=6x+2{,}75$

Graphique (complété) :