Ex 1 : ***Limites de fonctions* - (*) - 4 pts**

on applique le th de D'Alembert : $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1-x^2}{1+x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-x^2}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} -1 = \mathbf{-1}$

$x-\sqrt{x} = \sqrt{x}\times\sqrt{x}-\sqrt{x} = (\sqrt{x})(\sqrt{x}-1)$

or $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x}) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x}-1) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x}) = \mathbf{+\infty}$

$$\sqrt{x^2-4}-x = \frac{(\sqrt{x^2-4}-x)(\sqrt{x^2-4}+x)}{\sqrt{x^2-4}+x} = \frac{x^2-4-x^2}{\sqrt{x^2-4}+x} = \frac{-4}{\sqrt{x^2-4}+x}$$

or $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-4}+x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(-4) = -4$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-4}-x) = \mathbf{0}$

$\lim\limits_{x\to1\,;\,x<1}(3-2x)^3 = 1$ et $\lim\limits_{x\to1\,;\,x<1} 1-x = 0^+$ car $x<1$ implique $1-x>0$

donc (par quotient) : $\lim\limits_{x\to1\,;\,x<1} \frac{(3-2x)^3}{1-x} = \mathbf{+\infty}$

Ex 2 : ***Limites & Asymptotes* - (*) - 4 pts**

$f(x) = 2x+1+\frac{3}{x+1}$ tableau de variations de f

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{3/2}$		-1		$-1+\sqrt{3/2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$		α		$-\infty$ ‖ $+\infty$		β		$+\infty$

On note $\alpha = -1-2\sqrt{6} \simeq -5{,}9$ et $\beta = -1+2\sqrt{6} \simeq 3{,}9$

La courbe C_f admet 2 droites asymptotes :

- La droite (d) d'équation $x=-1$
- La droite (d') d'équation $y=2x+1$

$g(x) = \frac{x^3+1}{4x^2-1}$ tableau de variations de g

x	$-\infty$		$-1/2$		0		$1/2$		$1{,}457$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
g	$-\infty$		$+\infty$ ‖ $-\infty$		-1		$-\infty$ ‖ $+\infty$		α		$+\infty$

On note $\alpha = g(1{,}457) \simeq 0{,}546$

La courbe C_g admet 3 droites asymptotes :

- La droite (d) d'équation $x = \frac{-1}{2}$
- La droite (d') d'équation $x = \frac{1}{2}$
- La droite (d'') d'équation $y = \frac{x}{4}$

$h(x) = \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-4}}$ tableau de variations de h

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$h'(x)$		$+$		xxxxxxxxx		$-$	
h	0		$+\infty$	xxxxxxxxx xxxxxxxxx xxxxxxxxx xxxxxxxxx	$+\infty$		0

La courbe C_g admet 3 droites asymptotes :

- La droite (d) d'équation $x=-2$
- La droite (d') d'équation $x=2$
- La droite (d'') d'équation $y=0$

Ex 3 : ***Étude de fonctions*- (**) - 5 pts**

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{-2x^2+7x-8}{x-2}$ pour $x\neq2$

$\lim\limits_{x\to2\,;\,x<2}(-2x^2+7x-8) = -2$ et $\lim\limits_{x\to2\,;\,x<2}(x-2) = 0^-$ donc $\lim\limits_{x\to2\,;\,x<2} f(x) = +\infty$

d'après le th de d'Alembert :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{-2x^2}{x} = \lim_{x \to +\infty} (-2x) = -\infty$$

on déduit que la droite (d) d'équation $x=2$ est asymptote verticale à C_f

f est définie et dérivable sur $]-\infty\,;2[\cup]2\,;+\infty[$

$$f'(x) = \frac{(-4x+7)(x-2)-(-2x^2+7x-8)}{(x-2)^2}$$
$$= \frac{-4x^2+7x+8x-14+2x^2-7x+8}{(x-2)^2}$$
$$= \frac{-2x^2+8x-6}{(x-2)^2}$$

$f'(x)=0$ donne $-2x^2+8x-6=0$ soit $x=1$ ou $x=3$
$f'(x)>0$ donne $-2x^2+8x-6>0$ soit $1<x<3$

tableau de variations de f

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-5	↘	$-\infty$

On applique la méthode d'identification :

$$f(x) = ax+b+\frac{c}{x-2} = \frac{(ax+b)(x-2)+c}{x-2} = \frac{ax^2+(b-2a)x+(c-2b)}{x-2}$$

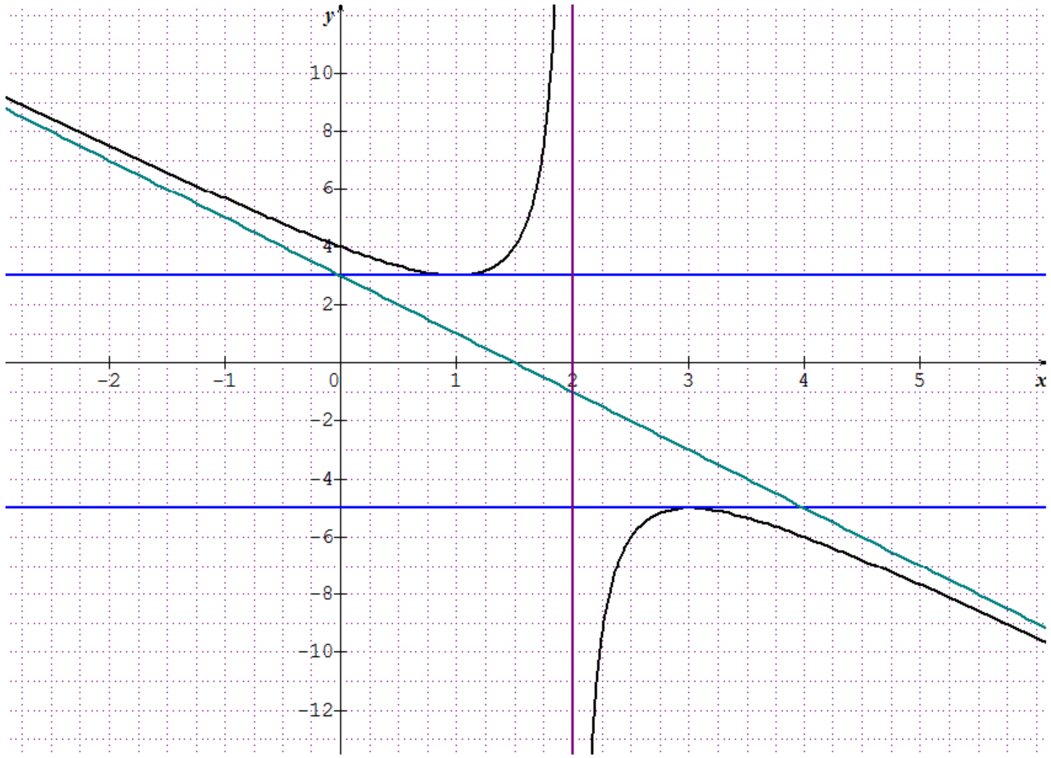
donc $a=-2, b-2a=7, c-2b=-8$ donc $a=-2, b=3, c=-2$

donc $f(x) = -2x+3-\dfrac{2}{x-2}$

Ainsi : $f(x)=(-2x+3)=\dfrac{-2}{x-2}$

donc $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-(-2x+3)) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{-2}{x-2}\right)=0$

donc la droite (d) d'équation $y=-2x+3$ est asymptote oblique à C_f
aux voisinages de $-\infty$ et $+\infty$



Ex 4 : ***Étude de fonctions* - (***) - 7 pts**

Soit la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{x+1}{x^3-1}$ pour $x\neq 1$

Partie A : Étude d'une fonction auxilliaire

On pose la fonction g déginie par $g(x)=-2x^3-3x^2-1$ avec $x\in\mathbb{R}$

g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ avec
$g'(x)=-6x^2-6x=(-6x)(x+1)$

$g'(x)=0$ donne $x=0$ ou $x=1$ et $g'(x)>0$ donne $0<x<1$

on en déduit le tableau de variations de g :

x	$-\infty$	α		-1		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$		0	$+$	0	$-$	
g	$+\infty$	0	↘	-2	↗	-1	↘	$-\infty$

D'après ce qui précède, g est continue, monotone sur $[-2;-1]$
de plus $g(-2)>0$ et $g(-1)<0$

donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x)=0$ possède une unique solution $\alpha\in]-2;-1[$

Avec la méthode des "tableaux successifs" on obtient facilement :
$-2<\alpha<-1$ puis $-1{,}7<\alpha<-1{,}6$ puis $-1{,}68<\alpha<-1{,}67$

on en déduit le signe de $g(x)$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

Partie B : Étude globale de la fonction principale

f est définie et dérivable sur $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$

$$f'(x)=\frac{1(x^3-1)-(x+1)(3x^2)}{(x^3-1)^2}=\frac{-2x^3-3x^2-1}{(x^3-1)^2}=\frac{g(x)}{(x^3-1)^2}$$

D'après la ***Partie A***, on déduit le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		α		1		$+\infty$
signe de f'		$+$	0	$-$	‖	$-$	
f	0	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^3}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)=0$$

$$\lim_{x\to1;x>1}(x+1)=2 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to1;x>1}(x^3-1)=0^+ \quad \text{donc} \quad \lim_{x\to1;x>1} f(x)=+\infty$$

On en déduit que :

- la droite (d) d'équation $x=1$ est asymptote verticale à C_f
- la droite (d') d'équation $y=0$ est asymptote horizontale à C_f

L'équation de la tangente à C_f au point d'abscisse $a=0$ est :
$y=f'(0)(x-0)+f(0)$ or $f'(0)=-1$ et $f(0)=-1$

donc cette tangente (T_0) a pour équation $y=-x-1$

$$f(x)-(-x-1)=\frac{x+1}{x^3-1}+x+1=(x+1)\left(\frac{1}{x^3-1}+1\right)=\frac{(x+1)x^3}{x^3-1}$$

on en déduit le signe de $f(x)-(-x-1)$:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
x^3		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x^3-1		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)-(-x-1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	‖	$+$	

Ainsi, on déduit les positions relatives de (C_f) et de (T_0) :

- (C_f) est située au-dessus de (T_0) sur $[-1;0]$ et sur $]1;+\infty[$
- (C_f) est située en-dessous de (T_0) sur $]-\infty;-1]$ et sur $[0;1[$