Ex 1 : Soit la suite (u_n) définie par $u_{n+1}=\frac{1}{4}u_n+3$ et $u_0=6$

- *Conjectures* : la suite (u_n) est décroissante, minorée par 4, majorée par 6 et convergente vers 4

Montrons par **récurrence** la propriété : $P_n : \forall n\in\mathbb{N} : 4<u_n\leqslant 6$

- *Initialisation* : $u_0=6$ donc $4<u_0\leqslant 6$ donc P_0 est vraie
- *Hérédité* : on suppose qu'il existe un entier n tel que P_n soit vraie

  donc $4<u_n\leqslant 6$ donc $1<\frac{u_n}{4}\leqslant 1{,}5$

  donc $4<\frac{u_n}{4}+3\leqslant 4{,}5<6$ donc $4<u_{n+1}\leqslant 6$

  donc P_{n+1} est vraie
- *Conclusion* : la suite (u_n) est minorée par 4 et majorée par 6

Montrons que la suite (u_n) est **décroissante** :

$$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{4}u_n+3-u_n=\frac{-3}{4}u_n+3=\frac{-3}{4}(u_n-4)$$

or $4<u_n$ d'après ce qui précède donc $u_n-4>0$ donc $u_{n+1}-u_n<0$
donc (u_n) est décroissante à partir du rang $n=0$

Montrons que la suite (u_n) est **convergente** :
La suite (u_n) est décroissante et minorée donc elle converge vers une limite L d'après le théorème de convergence des suites monotones

La limite L vérifie le théorème du point fixe donc $L=\frac{L}{4}+3$ donc $L=4$

Ex 2 : ***Complexes*- (*) - 4 pts**

Effectuer les calculs suivants et donner le résultat sous la forme algébrique :

$z=(3-11i)-(-8+9i)=\mathbf{11-20}\boldsymbol{i}$ (évident)
$z=(7+5i)(-4+3i)=-28-20i+21i-15=\mathbf{-43+}\boldsymbol{i}$
$z=(1-5i)^2=1-10i-25=\mathbf{-24-10}\boldsymbol{i}$
$z=i(1-3i)^2=i(1-6i-9)=i(-8-6i)=\mathbf{6-8}\boldsymbol{i}$
$z=1+i+i^2+i^3+i^4+i^5+i^6=\boldsymbol{i}$ (évident)
$z=\frac{1-2i}{3+i}=\frac{(1-2i)(3-i)}{(3+i)(3-i)}=\frac{3-6i-i-2}{3^2+1^2}=\mathbf{\frac{1}{10}-\frac{7}{10}}\boldsymbol{i}$

Ex 3 : Soit la suite (u_n) définie par $u_{n+1}=\frac{4u_n-2}{u_n+1}$ et $u_0=3$

Partie A : Étude de la fonction auxiliaire

Soit la fonction f définie par $f(x)=\frac{4x-2}{x+1}$ avec $x\in[0;+\infty[$

$$f'(x)=\frac{4(x+1)-(4x-2)}{(x+1)^2}=\frac{6}{(x+1)^2}$$

ainsi $6>0$ et $(x+1)^2$ donc $f'(x)>0$
donc f est strict croissante sur $[0;+\infty[$
$f(0)=-2$ donc f admet un minimum global en -2 pour la valeur 0
$\lim\limits_{+\infty} f(x)=4$ donc f admet un maximum global en 4 (non atteint)

Partie B : Étude de la suite principale

- *Conjectures* : la suite (u_n) est décroissante, minorée par 2, majorée par 3 et convergente vers 3

Montrons par **récurrence** la propriété : $P_n : \forall n\in\mathbb{N} : 2<u_n\leqslant 3$

- *Initialisation* : $u_0=3$ donc $2<u_0\leqslant 3$ donc P_0 est vraie
- *Hérédité* : on suppose qu'il existe un entier n tel que P_n soit vraie

  donc $2<u_n\leqslant 3$ donc $f(2)<f(u_n)\leqslant f(3)$

  donc $2<u_{n+1}\leqslant 2{,}5<3$ donc P_{n+1} est vraie
- *Conclusion* : la suite (u_n) est minorée par 2 et majorée par 3

Montrons que la suite (u_n) est **décroissante** :

$$u_{n+1}-u_n=\frac{4u_n-2}{u_n+1}-u_n=\frac{4u_n-2-u_n(u_n+1)}{u_n+1}=\frac{-u_n^2+3u_n-2}{u_n+1}=\frac{(u_n-1)(2-u_n)}{u_n+1}$$

or $2<u_n\leqslant 3$ donc $u_n-1>0$ et $2-u_n<0$ donc $u_{n+1}-u_n<0$
donc (u_n) est décroissante à partir du rang $n=0$

Montrons que la suite (u_n) est **convergente** :
La suite (u_n) est décroissante et minorée donc elle converge vers une limite L d'après le théorème de convergence des suites monotones

La limite L vérifie le théorème du point fixe donc $L=\frac{4L-2}{L+1}$

donc $L(L+1)=4L-2$ donc $L^2-3L+2=0$ donc $L=1$ ou $L=2$
or $2<L\leqslant 3$ donc la suite (u_n) est convergente vers 2

Ex 4 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$iz+3=-1+2i$ donc $z=\dfrac{-4+2i}{i}=2-\dfrac{4}{i}=\mathbf{2+4i}$ en effet $\dfrac{1}{i}=-i$

$z+i=2\bar{z}+1$ on pose $z=x+iy$ donc $\bar{z}=x-iy$

donc $x+i(y+1)=(2x+1)+i(-2y)$

donc $\begin{cases} x=2x+1 \\ y+1=-2y \end{cases}$ donc $\begin{cases} x=-1 \\ y=\dfrac{-1}{3} \end{cases}$ donc $z=\mathbf{-1-\dfrac{1}{3}i}$

$4z^2-4z+17=0$ donc $\Delta=-256=(16i)^2$

donc $z=\dfrac{4-16i}{8}=\mathbf{\dfrac{1}{2}-2i}$ ou $z=\mathbf{\dfrac{1}{2}+2i}$

$z^2=\bar{z}$ on pose $z=x+iy$ donc $\bar{z}=x-iy$

donc $(x+iy)^2=x-iy$ donc $x^2+2ixy-y^2=x-iy$

donc $\begin{cases} x^2-y^2=x \\ 2xy=-y \end{cases}$ donc $\begin{cases} y^2=x^2-x \\ y(2x+1)=0 \end{cases}$ donc $\begin{cases} x^2-x=0 \;\; ou \;\; y^2=\dfrac{3}{4} \\ y=0 \;\; ou \;\; x=\dfrac{-1}{2} \end{cases}$

donc $\begin{cases} x=0\,;x=1 \;\; ou \;\; y=\dfrac{-\sqrt{3}}{2}\,;y=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ y=0 \;\; ou \;\; x=\dfrac{-1}{2} \end{cases}$

donc $z=\mathbf{0}$ ou $z=\mathbf{1}$ ou $z=\mathbf{\dfrac{-1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i}$ ou $z=\mathbf{\dfrac{-1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i}$

$z^4=16$ donc $(z^2)^2-4^2=0$ donc $(z^{-4})(z^2+4)=0$

donc $(z-2)(z+2)(z-2i)(z+2i)=0$

donc $z=\mathbf{2}$ ou $z=\mathbf{-2}$ ou $z=\mathbf{-2i}$ ou $z=\mathbf{2i}$

BONUS :

$z^3+iz^2-iz+1+i=0$

on pose $P(z)=z^3+iz^2-iz+1+i$

on vérifie que $P(-1-i)=0$ donc $z_0=-1-i$ est une **racine** de P

donc on déduit la factorisation de $P(z)=(z+1+i)(z^2+az+b)$

ainsi $P(z)=z^3+az^2+bz+(1+i)z^2+a(1+i)z+b(1+i)$

donc $P(z)=z^3+(a+1+i)z^2+(b+a(1+i))z+b(1+i)$

par identification des termes 2 à 2 on obtient :

$\begin{cases} a+1+i=i \\ b+a+ai=-i \\ b+bi=1+i \end{cases}$ donc $\begin{cases} a=-1 \\ b+a=0 \\ b=1 \end{cases}$ donc $\begin{cases} a=-1 \\ b=1 \end{cases}$

on en déduit : $P(z)=(z+1+i)(z^2-z+1)$

donc l'équation devient $z+1+i=0$ ou $z^2-z+1=0$

donc $z=\mathbf{-1-i}$ ou $z=\mathbf{\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i}$ ou $z=\mathbf{\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i}$

Étudier la suite (v_n) définie par $v_{n+1}=\dfrac{4v_n-2}{v_n+1}$ et $v_0=0{,}5$

on observe que la suite (v_n) est monotone (et décroissante) <u>à partir de</u> <u>$n=3$</u>

on réutilise alors les résultats de l'***Ex n°3*** :

$v_{n+1}=f(v_n)$ avec f croissante sur $[3\,;+\infty[$

on démontre par **récurrence** la propriété : $P_n : \forall n\geqslant 3 \; : 2<v_n\leqslant 10$

(attention à initialiser la propriété à v_3)

$v_{n+1}-v_n=\dfrac{(v_n-1)(2-v_n)}{v_n+1}$ et $2<v_n\leqslant 10$ donc $v_n-1>0$ et $2-v_n<0$

donc $v_{n+1}-v_n<0$ donc (v_n) est décroissante à partir du rang $n=3$

La suite (v_n) est **décroissante** et **minorée** donc elle converge vers une limite L d'après le théorème de convergence des suites monotones

La limite L vérifie le th du point fixe donc $L=\dfrac{4L-2}{L+1}$ donc $L=2$

donc la suite (v_n) est **convergente** vers **2**